GELSON IEZZI

2ª edição

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA 3 ELEMENTAR TRIGONOMETRIA

121 exercícios resolvidos298 exercícios propostos com resposta215 testes de vestíbular com resposta



Capa

Roberto Franklin Rondino Sylvio Ulhoa Cintra Filho Rua Inhambu, 1235 — S. Paulo

Composição e desenhos

AM Produções Gráficas Ltda. Rua Castro Alves, 135 — S. Paulo

Artas

Atual Editora Ltda.

Fotolitos

H.O.P. Fotolitos Ltda. Rua Delmira Ferreira, 32S — S. Paulo

Impressão e acabamento

Companhía Melhoramentos de São Paulo Rua Tito, 479 — S. Paulo

> CIP-Brasil, Catalogação-na-Fontu Câmara Brasileira do Livro, SP

Fundamentos de matemática elementar (por) Gelson
Lasal (e outros) São Paulo, Atual Ed., 1977-78

Co-autores: Carlos Murakami, Osvaldo Bolce e Samuel Hazam; a matoria dos voltases individuais varia entre os 4 autores.
Conteñdo: v.1. Conjuntos, funçõas. 1977.-v.2.
Logarítmos. 1977.-v.3. Frigonometria. 1978.v.4. Sequidencias, matrizes determinantes, sistemas.
1977.-v.5. Combinatória, probabilidade. 1977.v.6. Complexos, polindios, equações. 1977.-v.7.
Geometria analítica. 1978.

1. Matemática (20 grau) K. Dolce, Cavaldo, 193811. Lezzi, Galaon, 1939-111. Hazzam, Samuel, 1946IV. Murakami, Carlos, 1943-

Todice para catalogo sistemático: I. Matemática 510

Todos os direitos reservados a ATUAL EDITORA LTDA
Rua José Antônio Coelho, 785
Telefones: 71-7795 e 549-1720
CEP 04011 - São Paulo - SP - Brasil

APRESENTAÇÃO

"Fundamentos de Matemática Elementar" é uma coleção em dez volumes elaborada com a pretensão da dar ao estudante uma visão global da Matemática, ao nível da escola de 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados para o curso colagial, os "Fundamentos" visam aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários qua necessitam rever a Matemática Elamentar e também, como é óbvio, áqueles alunos de colegial mais intaressados na "rainha das ciências",

No desenvolvimanto dos inúmeros capítulos dos livros de "Fundamentos" procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposiçõas e teoremas estão sempra acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de axercícios, buscamos sempra uma ordenação crescente da dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a quastões que envolvem outros assuntos já vistos, obrigando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e axarcícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobra alguma novidade que aparece. No final do volume o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e assim ter seu reforço positivo ou partir à procura do arro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares eté 1.977 selecionados e resolvidos o que pode ser usado para uma revisão da matéria estudada.

Queramos consignar aqui nossos agradecimentos sinceros ao Prof. Dr. Fernando Furquim de Almelda cujo apoio foi imprascindível para que pudéssemos homanagear nesta coleção alguns dos grandes matemáticos, relatando fatos notavais de suas vidas e suas obras.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anselo dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobra este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

ÍNDICE

1,	Arcos de circunferência
	Medidas de arcos 1
	Ângulos de duas semí-retas 5
	Medida de ângulos
٧,	Ciclo trigonométrico
	THE O. H. PHAGE TO ALBORY ABOVE
CAP	ITULO II – FUNÇÕES CIRCULARES
١,	Noções gerais
	Funções periódicas
111,	Função seno
IV,	Função cosseno
٧,	Função tangente
VI.	Função cotangente
	Função secante
	Função cossecante
CAP	TTULO III – RELAÇÕES FUNOAMENTAIS
1,	Introdução
	Relações fundamentais
111,	Identidades
11/	Demonstração de identidade

CAPÍTULO IV — REDUÇÃO AO 19 OUAORANTE
I. Redução do 2º ao 1º quadrante 53-C II. Redução do 3º ao 1º quadrante 54-C III. Redução do 4º ao 1º quadrante 55-C IV. Redução de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 56-C V. Identidades 58-C VI. Funções pares e funções ímpares 60-C
CAPÍTULO V - ARCOS NOTÁVEIS
I. Teorema 63-C II. Aplicações 64-C
CAPÍTULO VI - TRANSFORMAÇÕES
I, Fórmulas de adição67-CII. Fórmulas de multiplicação75-CIII. Fórmulas de divisão79-CIV. Tangente do arco metade82-CV. Transformação em produto83-C
CAPÍTULO VII - ÉOUAÇÕES
I. Equações fundamentais 93-C II. Resolução da equação sen $\alpha = \text{sen } \beta$ 94-C III. Resolução da equação $\cos \alpha = \cos \beta$ 98-C IV. Resolução da equação tg $\alpha = \text{tg } \beta$ 101-C V. Soluções de uma equação dentro de certo intervalo 104-C VI. Equações clássicas 107-C VII. Funções circulares inversas 115-C
CAPITULO VIII - INEQUAÇÕES
1. Inequações fundamentais 127-C II. Resolução de sen x > m 128-C III. Resolução de sen x < m

V. VI.	Resolução de Resolução de Resolução de Resolução de	$\cos x < m$ tg x > m.											132-C
CAP	ITULO IX -	- TRIĀNO	GULOS	RE	ΤÃ	NG	UL	.0:	3				
. .	Elementos pri Propriedades s Propriedades t Resolução de	jeométricas rigonométr	icas							 	 		142-0 146-0
CAP:	ĬΤULO X –	TRIĀNG	ULOS	OU.	AIS	QU	EF	l					
₩.	Propriedades t Propriedades ç Resolução de	pomėtricas			,	. ,		. ,					166-C
RES	POSTAS OE	EXERCI	CIOS .									٠.	175-C
TEST	ΓES												185-C
RES	POSTAS OO	S TESTES	s							 			221-C

Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857)

Engenheiro de Napoleão era monarquista

Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris, logo após a queda da Bastilha. Cursou a Escola Politécnica, onde mais tarde foi professor, pois gostava muito de ensinar, e aceitou a cadeira de Monge na Academia, quando este foi demitido. Ainda como estudante contou com o apoio de Laplace e Lagrange que se interessaram por seu trabalho.

Cauchy chegou a ser um dos engenheiros militares de Napoleão. Católico devoto e reacionário convicto, defendia vigorosamente a Ordem dos Jesuitas e quando Carlos X, seu rei, foi exilado, também deixou Paris, recebendo mais tarde o título de barão como recompensa por sua fidelidade.

Produziu grande quantidade de livros e memórias, a maioria dedicada à Matemática Pura e sempre dando ênfase às demonstrações rigorosas.

Uma de suas características marcantes era que, obtendo um novo resultado, logo tratava de publicá-lo, ao contrário do que fazia Gauss. Assim, contribuiu amplamente com suas memórias para o "Journal" da Escola Politécnica e para os "Comptes Rendus" (Notícias) da Academia, onde se aplicou, a partir de 1814, em teoria das funções de variáveis complexas, da qual é um dos criadores.

Data de 1812 seu primeiro trabalho sobre determinantes, com 84 páginas, passando a aplicá-los nas mais diversas situações como, por exemplo, na propagacão de ondas.

Entre 1821 e 1829, publicou três obras que deram ao Calculo elementar o caráter que tem hoje, definindo precisamente limite, derivada e integral; os conceitos de funções e de limites de funções eram fundamentais. Estas obras de Cauchy foram desenvolvidas quase ao mesmo tempo e com idéias semelhantes por Bolzano, um padre teheco.

Cauchy está ligado a muitos teoremas sobre séries infinitas, essenciais à teoria das funções, e em Geometria conseguiu generalizar a fórmula poliadral de Descartes-Euler.

Em Teoria dos Números, provou o teorema de Fermat, um dos mais difíceis e produto de pesquisas iniciadas pelos pitagóricos cerca de 2300 anos antes.

Juntamente com Navier, Cauchy foi fundador da teoria matemática da Elasticidade e também auxiliou o desenvolvimento da Mecânica celeste,

Cauchy, tanto quanto seu contemporâneo Gauss, contribuiu para quase todas as partes da Matemática e sua grande quantidade de obras publicadas só é superada por Euler.

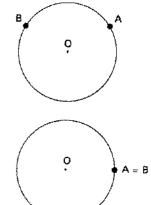
ARCOS E ÂNGULOS

I. ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

1. Definição

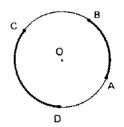
Dados dois pontos distintos A e 8 sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem A e 8, é denominada arco de circunferência ÂB.

Em particular, se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado arco nulo) e o outro é a circunferência (denominado arco de uma volta).

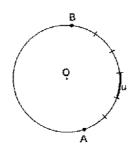


II. MEDIDAS DE ARCOS

2. Se queremos comparar os "tamanhos" de dois arcos AB e CD somos naturalmente levados a estabelecer um método que permita saber qual deles é o maior ou se são iguais. Este problema é resolvido estabelecendo-se um método para medir arcos.



3. Medida de um arco AB em relação a um arco unitário u (u não nulo e de mesmo raio que AB) è o número real que exprime quantas vezes o arco u "cabe" no arco AB. Assim, na figura ao lado, o arco u cabe 6 vezes no arco AB, então a medida do arco AB è 6, isto é, arco AB = 6 · arco u.



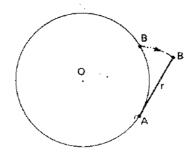
4. Unidades

Para evitar as confusões que ocorreriam se cada um escolhesse uma unidade u para medir o mesmo arco AB, limitamos as unidades de arcos a apenas duas: o grau e o radiano.

Grau (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento è igual ao ralo da circunferência que contém o arco a ser medido.

Assim, ao afirmar que um arco ÂB mede 1 rad estamos dizendo que "esticando" o arco ÂB obtemos um segmento de reta AB cuja medida è exatamente o raio da circunferência.

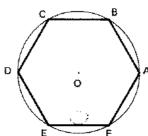


5. É evidente que uma circunferència mede 360°, porèm, jà não é tão fácil dizer quantos radianos mede uma circunferência.

Podemos chegar a uma noção intuitiva do valor dessa medida, considerando a seguinte construção:

 Em uma circunferència de centro O e raio r inscrevemos um hexágono regular ABCDEF, Cada lado do hexágono tem comprimento r:

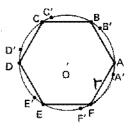
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = r$$



II) A circunferência fica dividida em 6 arcos de medidas iguais

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$$

e, sendo o comprimento do arco sempre maior que o comprimento da corda correspondente, todos esses arcos são maiores que 1 rad.



III) Em cada um dos citados arcos "cabe" 1 rad:

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{DE'} = \overrightarrow{EF'} = \overrightarrow{FA'} = 1 \text{ rad}$$

e ainda sobra uma fração de rad.

IV) O radiano "cabe" 6 vezes na circunferência e mais a soma dessas "sobras". Mais precisamente demonstra se que a circunferência mede 6,283584... rad (número batizado com o nome de 2π).

Tendo em vista estas considerações, podemos estabelecer a seguinte correspondência para conversão de unidades:

$$360^{\circ} \longleftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
 $180^{\circ} \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$

EXERCICIOS

C.1 Exprimir 225° em radianos.

Solução

Estabelecemos a seguinte regra de très simples:

b) 240°

C.2 Exprimir em radianos:

- a) 210° c) 270°
- c) 270° d) 300° e) 315° f) 330°
- C.3 Exprimir $\frac{11\pi}{6}$ rad em graus.

Solução

Temos:

$$\pi \text{ rad} \longleftrightarrow 180^{\circ}$$

$$\frac{11\pi}{6} \text{ rad} \longleftrightarrow x \qquad \text{logo } x = \frac{\frac{11\pi}{6} \cdot 180}{\pi} = 330^{\circ}$$

C.4 Exprimir em graus:

a)
$$\frac{\pi}{\epsilon}$$
 rad

b)
$$\frac{\pi}{4}$$
 rac

a)
$$\frac{\pi}{6}$$
 rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad

d)
$$\frac{2\pi}{2}$$
 rac

d)
$$\frac{2\pi}{3}$$
 rad e) $\frac{3\pi}{4}$ rad f) $\frac{5\pi}{6}$ rad

t)
$$\frac{5\pi}{6}$$
 rac

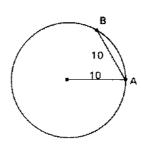
C.5 Um arco de circunferência mede 30 cm e o raio da circunferência mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.



Solucão

$$[\text{medida de AB em rad}] = \frac{\text{comprimento do arco AB}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3 \text{ rad}$$

Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco AB tal que a corda AB mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.



Solução

O segmento AB é lado do hexágono regular inscrito na circunferência, logo, o menor arco AB é & da circunferência,

$$\frac{1}{6} \times 2\pi \, \text{rad} = \frac{\pi}{3} \, \text{rad}$$

Um grau se divide em 60' (60 minutos) e um minuto se divide em 60" (60 segundos) Por exemplo, um arco de medida 30' é um arco de 0,5°. Pede-se converter a radianos os seguintes arcos:

Solução

a)
$$22^{\circ}30' = 22 \times 60' + 30' = 1350'$$

 $180^{\circ} = 180 \times 60' = 10800'$

então:

10800'
$$\longleftrightarrow$$
 π rad

logo x =
$$\frac{1350 \cdot \pi}{10800}$$
 = $\frac{\pi}{8}$ rad

b)
$$31^{\circ}15'45'' = 31 \times 3600'' + 15 \times 60'' + 45'' = 112545''$$

 $180^{\circ} = 180 \times 3600'' = 648000''$

então:

648 000"
$$\longleftrightarrow$$
 π rad

logo
$$x = \frac{112545 \cdot \pi}{648000} = \frac{112545 \cdot 3,1416}{648000} = 0,54563 \text{ rad}$$

Converter a graus o arco 1 rad.

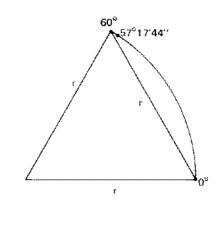
Solução

3,1416 rad
$$\longleftrightarrow$$
 180°
1 rad \longleftrightarrow x

| logo x = $\frac{180^{\circ}}{3,1416}$
1 800 000 | 31 416
229 200 57°17'44"
09 288
 \times 60
657 280
243 120
23 208
 \times 60
1 392 480

135 840

10 176



- Exprimir em radianos as medidas dos arcos a e b tais que $a b = 15^{\circ}$ e $a + b = \frac{7\pi}{4}$ rad.
- C.10 Exprimir em graus as medidas dos arcos a, b e c tais que a + b + c = 13°, a + b + 2c = $=\frac{\pi}{12}$ rad e^{-} a + 2b + c $=\frac{\pi}{9}$ rad.

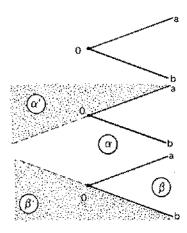
III. ÂNGULOS DE DUAS SEMI-RETAS

Consideremos duas semi-retas Da e Ob de mesma origem, distintas e não opostas.

A reta a divide o plano ab em dois semi-planos opostos.

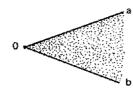
A reta b divide o plano ab em dois semi-planos opostos.

$$\beta \mid \beta \supset 0a \quad e \quad \beta' \mid \beta' \not\supset 0a$$



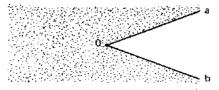
Ângulo convexo $\widehat{a0b}$ é a intersecção dos semi-planos α e β .

$$\widehat{a0b} = \alpha \cap \beta$$
 (convexo)



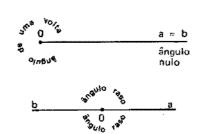
 \hat{A} ngulo côncavo \hat{aOb} è a reunião dos semi-planos α' e β' .

$$\widehat{a0b} = \alpha' \cup \beta'$$
 (côncavo)



7. Em particular, se as semi-retas 0a e Ob coincidem dizemos que elas determinam dois ângulos: um ângulo nulo e um ângulo de uma volta.

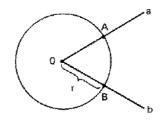
No caso particular das semi-retas 0a e 0b serem opostas dizemos que determinam dois *ângulos rasos*.



IV. MEDIDA DE ÂNGULDS

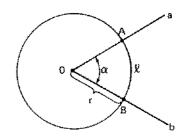
 Dado um ángulo a0b, consideremos uma circunferência de centro 0 e raio r.
 Sejam A e 8 os pontos onde os lados do ângulo a0b interceptam a circunferência.

A cada arco AB corresponde desta maneira um único ângulo central aOb e vice-versa. Convencionando que a um arco unitário corresponde um ângulo central unitário, decorre que o arco AB e o ângulo central aOb correspondente passam a ter a mesma medida.



Assim, por exemplo, temos:

- 19) ângulo de 1° è um ângulo central correspondente a um arco de 1°, isto é, è um ângulo central que determina na circunferência um arco igual a $\frac{1}{360}$ desta;
- 2º) ângulo de 1 rad è um ângulo central correspondente a um arco de 1 rad, isto é, è um ângulo central que determina na circunferência um arco cujo comprimento è igual ao do raio;
 - 3º) ângulo de 60° è um ângulo central correspondente a um arco de 60°;
 - 4º) ângulo de π rad é um ângulo central correspondente a um arco de π rad.
- 9. Quando queremos medir em radianos um ângulo a0b, devemos construir uma circunferência de centro 0 e raio r e verificar quantos radianos mede o arco AB, isto è, calcular o quociente entre o comprimento & do arco AB pelo raio r da circunferência:

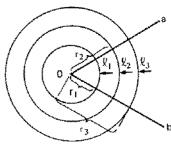


$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$
 (α em radianos)

Por exemplo, se o ângulo central $\widehat{a0b}$ è tal que determina numa circunferència de raio $r=5\,\mathrm{cm}$ um arco \widehat{AB} de medida $\ell=8\,\mathrm{cm}$, então a medida de $\widehat{a0b}$ é:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ rad}$$

Observemos que, fixado um ângulo central $\widehat{a0b}$ de medida α rad e construidas as circunferências de centro 0 e raios r_1, r_2, r_3 ..., os arcos correspondentes a $\widehat{a0b}$ têm comprimentos $\ell_1, \ell_2, \ell_3, ...$ tais que:



$$\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \dots = \alpha$$

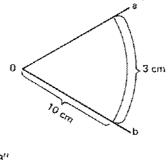
C.11 Catcular, em graus, a medida do ângulo a0b da figura.

Solução

$$\alpha = \frac{Q}{r} = \frac{3}{10}$$
 rad. Convertendo a graus:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} & \longrightarrow 180^{\circ} \\ \frac{3}{10} \text{ rad} & \longrightarrow x \end{cases}$$

$$\implies x = \frac{\frac{3}{10} \times 180^{\circ}}{\pi} = \frac{54}{3.1416} = 17^{\circ}11'19''.$$



Solução

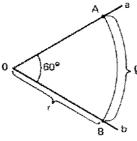
Convertido a radianos, o ángulo central

$$\widehat{a0b}$$
 tem medida $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad, então:

$$\alpha = \frac{\hat{\chi}}{r} \implies \hat{\chi} = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 10$$

portanto:

$$\ell = \frac{31,416}{3} = 10,472 \text{ cm}.$$



- C.13 Calcular a medida do ángulo central $\widehat{a0b}$ que determina em uma circunferência de raio r um arco de comprimento $\frac{2\pi r}{3}$.
- C.15 Calcular o menor dos ángutos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:
 - a) 1 h;

- b) 1 h 15 min;
- c) 1 h 40 min.

Solução

a) Notemos que os números do mostrador de um relógio estão colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, cada uma das quais mede 30°. Assim, à 1 h os ponteiros do relógio formam um ángulo convexo de 30°.



 b) Sabemos que em 60 minutos o ponteiro pequeno percorre um ángulo de 30°, então em 15 minutos ele percorre um ángulo α tal que:

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{30^{\circ}}{60}$$

portanto $\alpha = 7.5^{\circ} = 7^{\circ}30^{\prime}$.

Assim, temos:

 $\theta = 60^{\circ} + \alpha = 60^{\circ} - 7^{\circ}30' = 52^{\circ}30'$

c) Notemos que em 40 minutos o ponteiro pequeno percorre o ângulo β tal que:

$$\frac{\beta}{40}=\frac{.30^{\circ}}{60}$$

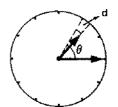
portanto $\beta = 20^{\circ}$.

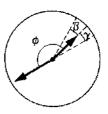
Assim, temos:

$$\phi = 150^{\circ} + \beta = 150^{\circ} + 20^{\circ} = 170^{\circ}$$

ou ainda

$$\phi = 180^{\circ} - \gamma = 180^{\circ} - 10^{\circ} = 170^{\circ}$$





- C.16 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que marca:
 - a) 2 h 40 min;
- b) 5 h 55 min;
- c) 6 h 30 min.

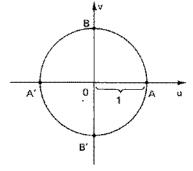
V. CICLO TRIGONOMETRICO

10. Definição

Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal u0v. Consideremos a circunferência λ de centro 0 e raio r=1. Notemos que o comprimento desta circunferência $\dot{e}=2\pi$ pois r=1.

Vamos agora definir uma aplicação de IR sobre λ, isto é, vamos associar a cada número real x um único ponto P da circunferência λ do seguinte modo:

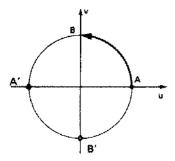
- 10) se x = 0, então P coincide com A:
- 2º) se x > 0, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.



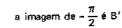
39) se x < 0, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento |x|, no sentido horário. O ponto final do percurso é P.

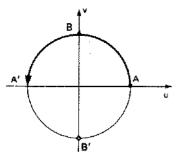
A circunferência à acima definida, com origem em A, è chamada ciclo ou circunferência trigonométrica.

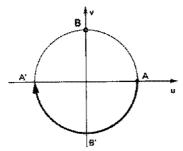
Se o ponto P está associado ao número x dizemos que P é a imagem de x no ciclo. Assim, por exemplo, temos:



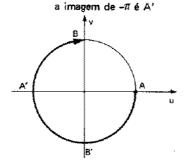
a imagem de $\frac{\pi}{2}$ € B







a imagem de π é A'



a imagem de 3# é B'

a imagem de
$$-\frac{3\pi}{2}$$
 é B

- 11. Notemos que se P é a imagem do número xo, então P também é a imagem dos números:

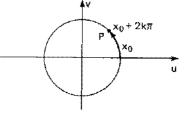
$$x_0$$
, $x_0 + 2\pi$, $x_0 + 4\pi$, $x_0 + 6\pi$, etc.

è também de

$$x_0 - 2\pi$$
, $x_0 - 4\pi$, $x_0 - 6\pi$, etc.

Em resumo, P é a imagem dos elementos do conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



Dois números reais $x_1 = x_0 + 2k_1\pi$ $(k_1 \in \mathbb{Z})$ e $x_2 = x_0 + 2k_2\pi$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$ que tem a mesma imagem P no ciclo são tais que $x_1 - x_2 = 2k\pi$ (onde $k = k_1 - k_2$) e, por isso, diz-se que x_1 e x_2 são côngruos mòdulo 2π ou simplesmente, x_1 e x_2 são côngruos,

EXERCICIOS

C.17 Divide-se o ciclo em 12 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determinar os x ($x \in [0, 2\pi]$) cujas imagens são os pontos divisores,

Solução

Notando que cada parte mede $\frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ e que P é a imagem de x quando $\widehat{AP} = x$, podemos construir a tabela abaixo:

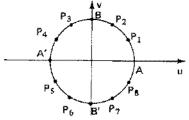


imagem de x	А	Pį	P ₂	8	P ₃	PĄ	A'	P ₅	Pé	B'	P ₇	Pa
×	0	# 6	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2n 3	<u>5π</u>	π	<u>7π</u>	477 3	<u>3π</u> 2	<u>5π</u> 3	11π 6

C.18 Divide-se o ciclo em 8 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determinar o conjunto dos x (x \in [0, 2π [) cujas imagens são os pontos divisores. C.19 Indicar no ciclo a imagem de cede um dos seguintes números:

a)
$$\frac{3\pi}{4}$$

b)
$$-\frac{5\pi}{4}$$

d) -3
$$\pi$$

e)
$$\frac{25\pi}{3}$$

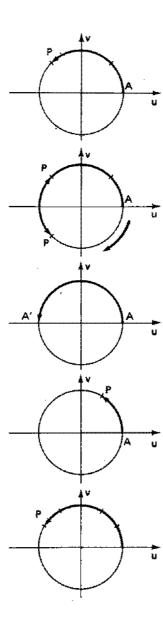
f)
$$-\frac{19\pi}{6}$$

Solução

a)
$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{8} \cdot 2\pi$$

Marcamos, a partir de A, um percurso \widehat{AP} igual a $\frac{3}{8}$ do ciclo, no sentido anti-horário.

- b) $-\frac{5\pi}{4} = -\frac{5}{8} \cdot 2\pi$ Marcamos, a pertir de A, um percurso \widehat{AP} igual a $\frac{5}{8}$ do ciclo, no sentido horário.
- c) $11\pi = \pi + 10\pi$ Como $11\pi - \pi$ é múltiplo de 2π , então 11π e π têm a mesma imagem (A').
- d) $-3\pi = \pi 4\pi$ Como $(-3\pi) - \pi$ é múltiplo de 2π , então -3π e π têm a mésma imagem (A').
- e) $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi$ Assim, $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ têm a mesma imagem P que é obtida marcando um percurso $\stackrel{\frown}{AP}$ igual a $\frac{1}{6}$ do ciclo, no sentido anti-horário.
- f) $-\frac{19\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-\frac{24\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-4\pi$ Assim, $-\frac{19\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ têm a mesma imagem. Como $\frac{5\pi}{6}=\frac{5}{12}\cdot 2\pi$, a imagem procurada é a extremidade do percurso $\stackrel{\frown}{AP}$ igual a $\frac{5}{12}$ do ciclo medido no sentido enti-horário.



- C.20 Indicar no ciclo as imagens dos seguintes números reais: $\frac{\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{7\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{15\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{4}$ and $-\frac{31\pi}{4}$.
- C.21 Representar, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

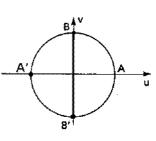
Solucão

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k = 0 \implies x = \frac{\pi}{2}$$
 (imagem: B)

$$k = 1 \implies x = \frac{3\pi}{2}$$
 (imagem: B')

$$k = 2 \implies x = \frac{5\pi}{2}$$
 (repetição: B)



O conjunto E tem como imagem os pontos B e B' do ciclo.

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

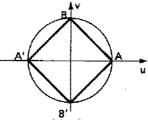
$$k = 0 \implies x = 0 \text{ (imagem: A)}$$

$$k = 1 \implies x = \frac{\pi}{2}$$
 (imagem: B)

$$k = 2 \implies x = \pi \text{ (imagem: A')}$$

$$k = 3 \implies x = \frac{3\pi}{2}$$
 (imagem: B')

$$k = 4 \implies x = 2\pi$$
 (repeticão: A)



- O conjunto F tem como imagem os pontos A, B, A' e B' do ciclo.
- C.22 Representar, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números reais:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$G = \{x \in |R| \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Padre refugia-se na Matemática

Bernhard Bolzano nasceu e morreu em Praga, Tchecoslováquia, e embora fosse padre tinha idéias contrárias às da Igreja.

Suas descobertas matemàticas foram muito pouco reconhecidas por seus contemporâneos.

Em 1817 publicou o livro "Rein Analytisches Beweis" (Prova puramente analítica), provando através de métodos aritméticos o teorema de locação em Álgebra, exigindo para isso um conceito não geométrico de continuidade de uma curva ou função.

Bolzano, a essa época, já havia percebido tão bem a necessidade de rigor em Análise, que Klein o chamou "pai da aritmetização", embora tivesse menos influência que Cauchy com sua análise baseada em conceitos geométricos mas, embora os dois nunca tivessem se encontrado, suas definições de limite, derivada, continuidade e convergência eram bem semelhantes.

Em uma obra póstuma de 1850, Bolzano chegou a enunciar propriedades importantes dos conjuntos finitos e, apoiando-se nas teorias de Galileu, mostrou que existem tantos números reais entre 0 e 1, quanto entre 0 e 2, ou tantos em um segmento de reta de um centímetro quanto em um segmento de reta de dois centímetros.

Parece ter percebido que a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade de números inteiros, sendo não enumeráveis, estando mais próximo da Matemática moderna do que qualquer um de seus contemporâneos.

Em 1834, Bolzano havia imaginado uma função contínua num intervalo e que não tinha derivada em nenhum ponto desse intervalo mas o exemplo dado não ficou conhecido em sua época, sendo todos os méritos dados a Weierstrass que se ocupou em redescobrir esses resultados, depois de cinqüenta anos. Conhecemos hoje como teorema de Bolzano-Weierstrass aquele segundo o qual um conjunto limitado contendo infinitos elementos, pontos ou números, tem ao menos um ponto de acumulação.

O mesmo aconteceu com os critérios de convergência de séries infinitas que levam hoje o nome de Cauchy e assim também com outros resultados.

Há quem diga que Bolzano era "uma voz clamando no deserto".

FUNÇÕES CIRCULARES

I. NOÇÕES GERAIS

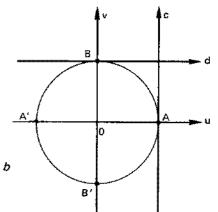
12. Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A. Para o estudo das funções circulares vamos associar ao ciclo quatro eixos:

19) eixo dos cossenos (u) direção: OA sentido positivo: O → A

20) eixo dos senos (v)
direção: 1a, por 0
sentido positivo: de 0 → B
seodo B tal que ÂB = π/2

3º) eixo das tangentes (c) direção: paralelo a v por A sentido positivo: o mesmo de b

4º) eixo das cotangentes (d) direção: paralelo a u por B sentido positivo; o mesmo de a.



13. Os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos: \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{B'A}$. Dado um número real x, usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de x no ciclo:

x está no 1º quadrante \iff P \in \widehat{AB} \iff 0 + 2k π \leqslant x \leqslant $\frac{\pi}{2}$ + 2k π x está no 2º quadrante \iff P \in \widehat{BA}' \iff $\frac{\pi}{2}$ + 2k π \leqslant x \leqslant π + 2k π x está no 3º quadrante \iff P \in $\widehat{A'B'}$ \iff π + 2k π \leqslant x \leqslant $\frac{3\pi}{2}$ + 2k π x está no 4º quadrante \iff P \in $\widehat{B'A}$ \iff $\frac{3\pi}{2}$ + 2k π \leqslant x \leqslant 2 π + 2k π

II. FUNCÕES PERIÓDICAS

14. Exemplo preliminar

Dado o número real x, sempre existem dois números inteiros consecutivos n e n + 1 tais que $n \le x < n + 1$. Consideremos a função f que associa a cada real x o real x - n onde n è o maior número inteiro que não supera x. Temos, por exemplo:

$$f(0, 1) = 0.1;$$
 $f(1, 1) = 1.1 - 1 = 0.1;$ $f(2, 1) = 2.1 - 2 = 0.1;$ $f(3) = 3 - 3 = 0;$ $f(-5) = (-5) - (-5) = 0;$ $f(7) = 7 - 7 = 0.$

De modo geral, temos:

$$0 \le x < 1$$
 \implies $f(x) = x - 0 = x$
 $1 \le x < 2$ \implies $f(x) = x - 1$
 $2 \le x < 3$ \implies $f(x) = x - 2$

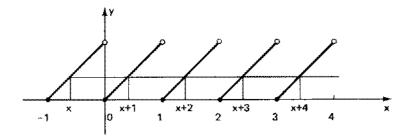
etc.

$$-1 \le x < 0 \implies f(x) = x - (-1) = x + 1$$

 $-2 \le x < -1 \implies f(x) = x - (-2) = x + 2$
 $-3 \le x < -2 \implies f(x) = x - (-3) = x + 3$

etc.

Seu gráfico é:



Temos:

$$f(x) = f(x + 1) = f(x + 2) = f(x + 3) = f(x + 4) = ... \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

portanto existem infinitos números p inteiros tais que $f(x) = f(x + p), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

15. O menor número p > 0 que satisfaz a igualdade $f(x) = f(x + p), \forall x \in \mathbb{R}$ é o número p = 1, denominado período da função f. A função f é chamada função periódica porque foi possível encontrar um número p > 0 tal que

dando acréscimos iguais a p em x, o valor calculado para f não se altera, isto é, o valor de f se repete periodicamente para cada acréscimo de p à variável.

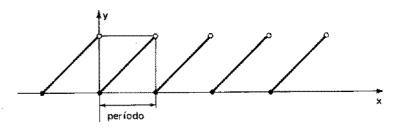
16. Definição

Uma função $f:A \rightarrow B$ é periódica se existir um número p > 0 satisfazendo a condição

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in A$$

O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado periodo de f.

17. O gráfico da função periódica se caracteriza por apresentar um elemento de curva qua se repete, isto é, se quisermos desenhar toda a curva bastará construirmos um carimbo onde está desenhado o tal elemento de curva e ir carimbando. *Período* é o comprimento do carimbo (medido no sixo dos x).

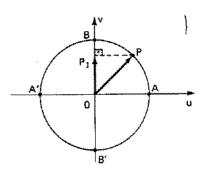


III. FUNÇÃO SENO

18. Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos sen x) a ordenada \overline{OP}_1 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real \overline{OP}_1 = sen x, isto e:

$$f(x) = sen x.$$



19. Propriedades

1ª) A imagem da função seno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \le \text{sen } x \le 1$ para todo x real.

É imediata a justificação pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a +1.

- 2ª) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então sen x é positivo. De fato, neste caso o ponto P está acima do eixo u e sua ordenada è positiva.
- 3ª) Se x è do terceiro ou quarto quadrante, então sen x é negativo. De fato, neste caso o ponto P está abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa.
- 4ª) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então sen x é crescente.

É imediato que, se x percorre o primeiro quadrante, então P percorre o arco AB e sua ordenada cresce. Fato análogo acontece no quarto quadrante.

- 5ª) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então sen x è decrescente.
- É imediato que, se x percorre o segundo quadrante, então P percorre o arco BA' e sua ordenada decresce. Fato análogo acontece no terceiro quadrante.
 - 6ª) A função seno é periódica e seu período é 2π.

É imediato que, se sen $x=\overline{OP}_1$ e $k\in \mathbb{Z}$, então sen $(x+k+2\pi)=\overline{OP}_1$ pois x e $x+k+2\pi$ têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real:

$$sen x = sen (x + k - 2\pi)$$

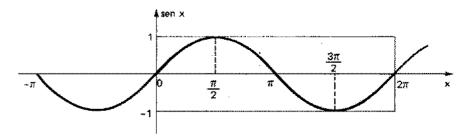
e, portanto, a função seno è periódica. Seu período é o menor valor positivo de $\mathbf{k} \cdot 2\pi$, isto é, 2π .

20. Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com sen x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a ordenada de P varia segundo a tabela:

x	0		7 2		π		<u>3π</u> 2		2π
sen ×	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	çresce	0

Fazendo um diagrama com x em abscissas e sen x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado senóide, que nos indica como varia a função $f(x) = \operatorname{sen} x$.



Observemos que, como o domínio da função seno é \mathbb{R} , a senóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um periodo da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto é, aproximadamente 6,28 \times 2.

EXERCÍCIOS

Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas do C.23 ao C.42:

C.23 $f: |R \rightarrow R|$ dada por f(x) = - sen x.

Solução

Vamos construir uma tabela em trés etapas:

- 1a) atribuímos valores a x:
- 2ª) associamos a cada x o valor de sen x:
- 3^a) multiplicamos sen x por -1.

×	sen x	у
0		
<u>π</u>		
π	,	
<u>3π</u> 2		
2 π		

	×	\$€n x	у
;	0	0	
	<u>π</u>	1	
	π	0	
	<u>3π</u> 2	-1	
	2π	O	

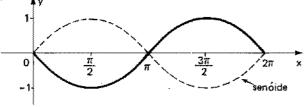
sen x	у
0	0
1	-1
0	0
-1 .	1
0	0
	0 1 0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que é simétrico de senóide em relação ao eixo dos x.

É imediato que:

$$lm(f) = [-1, 1]$$

 $p(f) = 2\pi$



C.24
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 dada por $f(x) = 2 \cdot \sin x$

Solução

Vamos construir uma tabela em très etapas:

- 1ª) atribuímos valores a x;
- 2ª) associamos a cada x o valor de sen x;
- 32) multiplicamos sen x por 2.

×	sen x	γ
0		
# 2		1
π		
3/T 2		
2π		

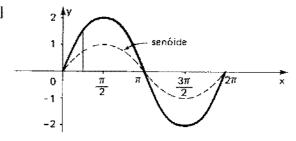
×	sen x	у
0	0	
π 2	1	
717	0	
<u>3π</u> 2	-1	
2π	0	

×	sen x	У
Ç	0	0
<u>π</u>	1	2
π	0	0
3π 2	-1	-2
2π	0	0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o dobro da ordenada correspondente da senóide. É imediato que:

$$lm(f) = [-2, 2]$$

 $p(f) = 2\pi$



:.25 f: \mathbb{R} → \mathbb{R} dada por $f(x) = -2 + \operatorname{sen} x$.

Solução

Recordemos inicialmente que para um dado número real a, temos:

$$a \ge 0 \implies |a| = a$$

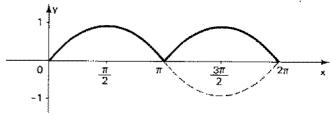
Aplicando esta definição, temos:

$$sen x \ge 0 \implies |sen x| = sen x$$

(quando sen
$$x \ge 0$$
, os gráficos $y = |\sin x|$ e $y = \sin x$ coincidem)

(quando sen x < 0, os gráficos y = |sen x | e y = sen x são simétricos em relação ao eixo dos x).

É imediato que:



27 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |3 \cdot \sin x|$

28
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 dada por $f(x) = \sin 2x$

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

- 1^a) atribuímos valores a t = 2x;
- 2ª) associamos a cada 2x o correspondente sen 2x;
- 3. calculamos x $(x = \frac{1}{2})$.

×	t = 2×	у
	0	
	7 2	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

×	t = 2x	у
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	п	0
	3π 2	-1
	2π	0

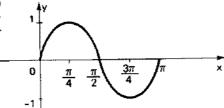
		
×	t = 2x	У
0	0	0
π 4	<u>π</u>	1
<u>π</u>	77	0
3# 4	<u>3π</u> 2	-1
π	211	0

Com base nesta tabela, podemos obter 5 pontos da curva. Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno do dobro de x. Notemos einda

que para sen t completar um período é necessário que t = 2x percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, x percorra o intervalo $[0, \pi]$.

Assim, o periodo de f é: $p(f) = \pi - 0 = \pi$

E imediato que: tm(f) = [-1, 1]



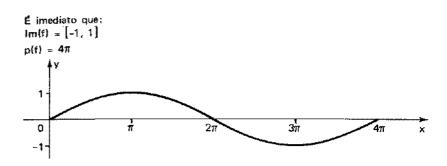
C.29 f: $|\mathbf{R} \to |\mathbf{R}|$ dada por f(x) = sen $\frac{x}{2}$.

Solução

×	t = x / 2	٧
	0	
	7/2	
	π	
	3π 2	
	2π	

×	t = ×	Y
	0	0
·-	π_ 2	1
	Ħ	0
	3π 2	-1
	2π	0

-	x	t = × 2	У
	0	0	O.
	π	<u>π</u> 2	1
	2π	77	0
	3π	<u>3π</u>	+1
	4π	2π	0



C.30 f;IR →IR dada por f(x) = sen 3x

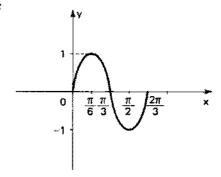
Solução

×	t≖3x	у
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	<u>3π</u> 2	
	2π	

×	t = 3x	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	O
	<u>3π</u> 2	-1
	2π	0

x	t = 3x	¥
0	0	0
77 6	$\frac{\pi}{2}$	1
<u>π</u> 3	π	0
π 2	<u>3π</u> 2	-1
<u>2π</u> 3	2π	0

E imediato que: $Im(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ $p(f) = \frac{2\pi}{3}$



- C.31 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dade per $f(x) = -\sin \frac{x}{3}$.
- C.32 f: R → R dada por f(x) = 3 · sen 4x.

Solução

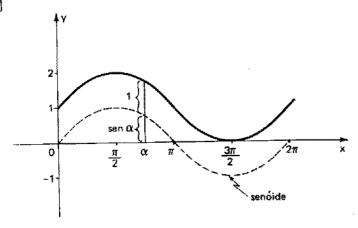
x	sen x	У
0		
π 2		
77		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

×	sen x	¥
0	0	
η 2	1	
π	Q	
$\frac{3\pi}{2}$	1	
271	0	

×	sen x	У
0	0	1
<u>π</u>	1	2
រា	0	1
<u>3π</u> 2	1	0
2я	0	1

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é igual ao seno de x mais uma unidade. Se cada seno sofre um acréscimo de 1, então a senóide sofre uma translação de uma unidade "para cima".

$$p(f) = 2\pi$$



C.34 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 + \operatorname{sen} x$.

C.35 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \operatorname{sen} x$.

C.36 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - \operatorname{sen} x$.

C.37 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1 + \sin 2x$.

C.38 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 3 - \sin \frac{x}{2}$.

C.39 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dads por $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$.

Solução

×	t = x - 17	y
	0	
***************************************	π/2	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

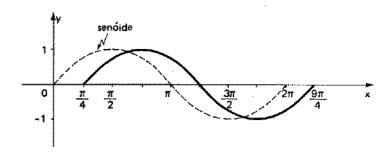
x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	¥
	0	0
	л 2	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0
	-	

×	t = x - π/4	у
# 4	0	0
<u>3π</u>	<u>π</u>	1
5π 4	π	0
<u>7π</u> 4	<u>3π</u> 2	-1
9π 4	2π	0

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno de $x=\frac{\pi}{4}$. Notemos que para sen t completar um período é necessário que $t=x=\frac{\pi}{4}$ percorra o intervalo $\left[0,\ 2\pi\right]$, isto é, x percorra o intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4}\right]$. Assim, o período de f é:

$$p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

£ imediato que: lm(f) = [-1, 1].



C.40 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen \{x + \frac{\pi}{3}\}$.

C.41 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deda por $f(x) = \text{sen}(2x - \frac{\pi}{3})$.

C.42 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$.

C.43 Sendo a, b, c, d números reais e positivos, determinar imagem e período da função f: R → R dada por f(x) = a + b · sen (cx + d).

Solução

Façamos cx + d = t. Quando x percorre IR, t percorre IR (pois a função afim t = ax + b é sobrejetora) e, em consequência, sen t percorre o intervalo [-1, 1], b + sen t percorre o intervalo [-b, b] e y = a + b + sen t percorre o intervalo [a - b, a + b], que é a imagem de f.

Para que f complete um período é necessário que t varie de 0 a 2π , então:

$$t=0$$
 \Longrightarrow $cx+d=0$ \Longrightarrow $x=-\frac{d}{c}$

$$t = 2\pi$$
 \Longrightarrow $cx + d = 2\pi$ \Longrightarrow $x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}$

portanto:

$$p = \Delta x = (\frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}) - (-\frac{d}{c}) = \frac{2\pi}{c}.$$

C.44 Construir o gráfico de um período da função f: R → IR tal que

$$f(x) = 1 - 2 \cdot sen(2x - \frac{\pi}{3}).$$

C.45 Para que valores de m existe x tal que sen x = 2m - 5?

Solução

Para que exista x satisfazendo a igualdade acima devemos ter:

$$-1 \le 2m - 5 \le 1 \iff 4 \le 2m \le 6 \iff 2 \le m \le 3$$

C.46 Em cada caso abaixo, para que valores de m existe x satisfazendo a igualdade?

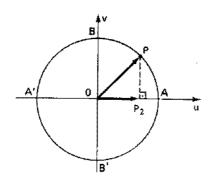
a)
$$sen x = 2 - 5m$$
;

b) sen x =
$$\frac{m-1}{m-2}$$
.

IV. FUNÇÃO COSSENO

21. Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa \overline{OP}_2 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função cosseno a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP}_2 = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.



22. Propriedades

1ª) A imagem da função cosseno é o intervalo [-1, 1], isto é, -1 ≤ cos x ≤ 1 para todo x real.

2ª) Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então cos x é positivo.

3ª) Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então cos x è negativo.

4ª) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então cos x é crescente.

5ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então cos x é decrescente.

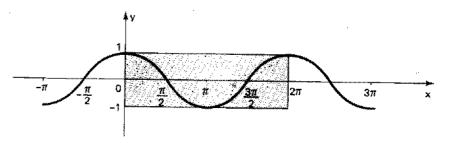
6ª) A função cosseno è periódica e seu período é 2π.

23. Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com cos x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a abscissa de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	decresce	0	decresce	- 1	cresce	0	cresce	1

Fazendo um diagrama com x em abscissas e cos x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *cossenóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = \cos x$



Observemos que, como o domínio da função cosseno é IR, a cossenóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto è, aproximadamente 6.28×2 .

EXERCÍCIOS

Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas do C.47 ao C.56:

C.47 f: $|R \rightarrow R|$ dada por $f(x) = -\cos x$.

C.48 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos x$.

C.49 f; $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3 \cdot \cos x$.

C.50 f: $R \rightarrow |R|$ dada por $f(x) = |\cos x|$.

C.51 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos 2x$.

C.52 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

C.53 I: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \cos x$.

C.54 f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos 3x$.

C.55 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

C.56 f: $R \rightarrow iR$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$.

C.57 Determinar imagem e período da função f: $|R| \rightarrow |R|$ dada por $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos(3x - \frac{\pi}{A})$.

C.58 Para que valores de t existe x satisfazendo a igualdade $\cos x = \frac{t+2}{2t-1}$?

C.59 Determinar o sinal da expressão y = sen 107° + cos 107°.

Solução

Examinando o ciclo, notamos qua:

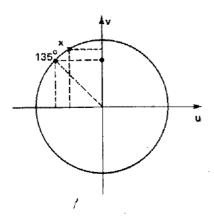
e

$$90^{\circ} < x < 135^{\circ} \Longrightarrow |sen x| > |cos x|$$

Como sen $107^{\circ} > 0$, cos $107^{\circ} < 0$

e |sen 107°| > |cos 107°|, decorre:

sen 107° + cos 107° > 0.



C.60 Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

$$y_1 = \sin 45^{\circ} + \cos 45^{\circ}$$

 $y_2 = \sin 225^{\circ} + \cos 225^{\circ}$
 $y_3 = \sin \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$
 $y_4 = \sin 300^{\circ} + \cos 300^{\circ}$

C.61 Esboçar o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

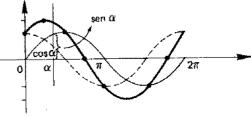
Solução

Noternos que para cada x esta função associa um y que é a soma do seno com o cosseno de x. Vamos, então, colocar num diagrama a senóide e a cossenóide e, para cada x, somemos as ordenadas dos pontos encontrados em cada cur-

Veremos mais adiante que:

Im(f) =
$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

p(f) = 2π .



C.62 Esboçar o gráfico de um período de função f; R→ R dada por f(x) = cos x - sen x.

C.63 Provar que se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então sen x + cos x > 1.

Sugestão: ciclo trigonométrico.

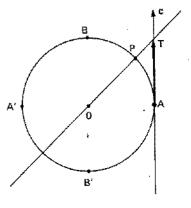
V. FUNÇÃO TANGENTE

24. Definição

Dado um número real X,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta \overrightarrow{OP} e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicamos tg x) a medida algébrica do segmento \overrightarrow{AT} .



Denominamos função tangente a função f: D \rightarrow R que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{AT} = tg x$, isto é, f(x) = tg x.

Notemos que, para $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta \overrightarrow{OP} fica paralela ao elxo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a tg x não é definida.

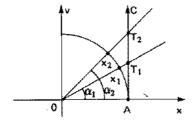
25. Propriedades

- 1ª) O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}.$
- 2^{a} .) A imagem da função tangente é IR, isto é, para todo y real existe um x real tal que tg x = y.

De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overline{AT} = y$. Construindo a reta \overline{OT} , observamos que ela intercepta o cíclo em dois pontos P e P', imagens dos reais x cuja tangente é y.

- 3ª) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então tg x é positiva. De fato, neste caso o ponto T está acima de A e AT é positiva.
- 4ª) Se x é do segundo ou quarto quadrante, então tg x é negativa. De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e AT é negativa.
- 5ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tg x é crescente.

Provemos, por exemplo, quando x percorre o 1º quadrante. Dados x_1 e x_2 , com $x_1 < x_2$, temos $\alpha_1 < \alpha_2$ e, por propriedade de Geometria Plana, vem $\overline{AT}_1 < \overline{AT}_2$, isto é: tg $x_1 <$ tg x_2 .



 6^{8}) A função tangente é periódica e seu período é π .

De fato, se $tg \times = \overrightarrow{AT}$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $tg(x + k\pi) = \overrightarrow{AT}$ pois $x \in x + k\pi$ têm imagens $P \in P'$ coincidentes ou diametralmente opostas no ciclo e, assim, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$, portanto, $\overrightarrow{OP} \cap c = \overrightarrow{OP'} \cap c$.

Temos, então, para todo x real e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$tg \times = tg(x + k\pi)$$

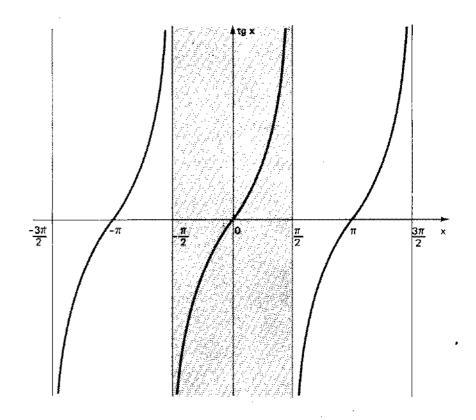
e a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π .

26. Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com tg x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a medida algébrica \overline{AT} varia segundo a tabela:

x	0		π 2		Я		<u>3π</u> 2		2π
tg x	0	cresce	∌	cresce	0	cresce	∌	cresce	0

Fazendo um diagrama com x em abscissas e tg x em ordenadas, podemos construir o gráfico seguinte, denominado tangentóide, que nos indica a variação da função f(x) = tg x.



C.64 Qual é o domínio da função real f tal que f(x) = tg 2x?

Solução

Façamos 2x = t. Sabemos que existe tg t se, e somente se, t $\neq \frac{\pi}{2}$ + k π

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) e$$

$$D(f) = \{x \in |R| | x \neq \frac{\pi}{4} + k = \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

C.65 Qual é o domínio das seguintes funções reais?

a)
$$f(x) = tg 3x$$

b)
$$g(x) = tg(2x - \frac{\pi}{3}).$$

C.66 Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

$$y_1 = tg 269^\circ + sen 178^\circ$$
 $y_2 = tg \frac{12\pi}{7} \cdot (sen \frac{5\pi}{11} + cos \frac{23\pi}{12}).$

- C.67 Para que valores de α existe x tal que $tg x = \sqrt{\alpha^2 5\alpha + 4}$?
- C.68 Esboçar o gráfico, der o domínio e o período da função real $f(x) = tg(x \frac{\pi}{4})$.

Solução:

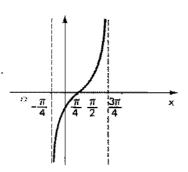
Façamos x - $\frac{\pi}{4}$ = t. Temos: $\exists tgt \Longrightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ então D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z\}$.

Para to ti descrever um período completo devemos ter:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

então
$$p(f) = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$$
.

Como a função associa a cada x a $tg(x - \frac{\pi}{4})$, teremos (por analogia com as funções já vistas) um gráfico que é a tangentôlde deslocada de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.



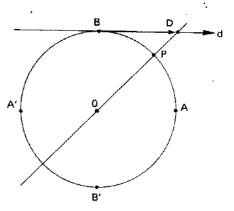
C.69 Esboçar o gráfico, dar o domínio e o período da função real $f(x) = tg(2x + \frac{\pi}{6})$.

VI. FUNÇÃO COTANGENTE

27. Definição

Dado um número real $x, x \neq k\pi$ seja P sua imagem no ciclo, Consideremos a reta OP e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x (e indicamos cotgix) a medida algébrica do segmento BD. Denominamos função co- A tangente a função f: D → IR que associa a cada real x, x ≠ kπ, o real BD = = $\cot x$, isto é, $f(x) = \cot x$.

Notemos que, para $x = k\pi$, P està em A ou A' e, então, a reta OP fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D. a coto x não é definida.

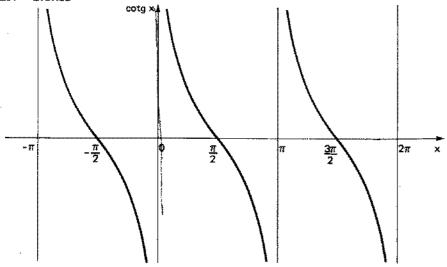


28. Propriedades

- 1^a) O domínio da função cotangente è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.
- 2ª) A imagem da função cotangente é IR, isto è, para todo y real existe um x real tal que $\cot x = y$.
 - Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então cotg x è positiva.
 - Se x é do segundo ou quarto quadrante, então cotg x é negativa.
- Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então cotg x é decrescente.
 - 6ª) A função cotangente é periódica e seu período é π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

29. Gráfico



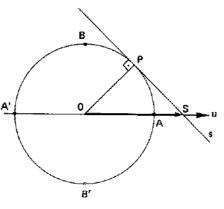
VII. FUNÇÃO SECANTE

30, Definição

Dado um número real x,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de A' \times (e indicamos sec \times) a abscissa \overline{OS} do ponto S. Denominamos função secante a função f: D \rightarrow R qua associa a cada real \times , $\times \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{OS} = \sec \times$, isto é, $f(\times) = \sec \times$.



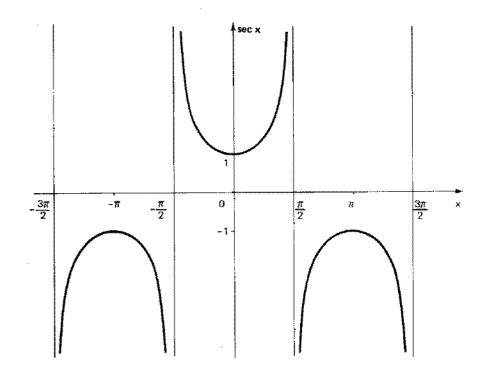
Noternos que, para $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a sec x não é definida.

31. Propriedades

- 1ª) O domínio da função secante é D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.
- 2ª) A imagem da função secante é $\mathbb{R}-]-1$, 1[, isto é, para todo real y, com y ≤ -1 ou y ≥ 1 , existe um x real tal que sec x = y.
 - 3ª) Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então sec x é positiva.
 - 49) Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então sec x é negativa.
- 5ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então sec x é crescente.
- 6^{a} .) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então sec x \acute{e} decrescente.
 - 7ª) A função secante é periódica e seu período é 2π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

32. Gráfico

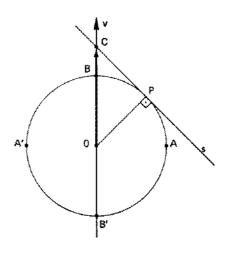


VIII. FUNÇÃO COSSECANTE

33. Definição

Dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x (e indicamos por cossec x) a ordenada \overline{OC} do ponto C. Denominamos função cossecante a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real \overline{OC} = cossec x, isto \dot{e} , f(x) = cossec x.

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a cossec x não é definida.

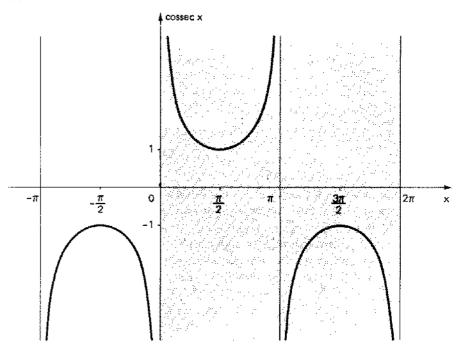


34. Propriedades

- 1ª) O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}.$
- 2ª) A imagem da função cossecante é $\mathbb{R}]-1$, 1[, isto é, para todo real y, com y ≤ -1 ou y ≥ 1 , existe um x real tal que cossec x = y.
 - 38) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então cossec x é positiva.
 - 4ª) Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então cossec x é negativa.
- 5ª) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então cossec x é crescente.
- 6^{a}) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então cossec x é decrescente.
 - 7ª) A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

35. Gráfico



período completo da função cosseçante

EXERCÍCIOS

C.70 Determinar domínio e período das seguintes funções reais:

$$f(x) = \cot g(x - \frac{\pi}{3}), g(x) = \sec 2x, h(x) = \csc (x + \frac{\pi}{4}).$$

C.71 Em cada caso determinar o conjunto ao qual m deve pertencer de modo que exista x satisfazendo a igualdade:

a) cotg x =
$$\sqrt{2 - m}$$

b)
$$\sec x = 3m - 2$$

c) cossec
$$x = \frac{2m - 1}{1 - 3m}$$

C.72 Determinar o sinal das seguintes expressões:

$$y_3 = \sec \frac{9\pi}{8} \cdot (tg \frac{7\pi}{6} + \cot g \frac{\pi}{7}).$$

RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

CONOUÇÃO OO CALOR: NOVA TEORIA

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre, em 1768, Órfão aos 8 anos, Fourier foi colocado no Colégio Militar, dirigido pelos beneditinos,

Aos 12 anos, Fourier começou a mostrar parte do seu talento, redigindo sermões para sacerdotes de várias cidades. Dois anos mais tarde iniciou seus estudos de Matemática, conseguindo grande destaque. Considerado menino-prodígio, foi convidado a ingressar na ordem dos beneditinos mas, antes de ordenar-se, chegou a Revolução de 1789.

Fourier que sempre desejara ser militar, aderiu com entusiasmo à causa da Revolução. Com a criação da Escola Normal e da Escola Politécnica, das quais foi conferencista, Fourier começou a desenvolver os trabalhos que o imortalizaram como matemático. Data dessa época sua teoria para calcular raízes irracionais das equações algébricas, cujo estudo Newton íniciara.



Jean B. J. Fourier (1768 - 1830)

Tendo acompanhado Napoleão no Egito, Fourier desenvolveu ali estudos de arqueologia, tornando-se especialista em egiptologia, Fourier trabalhou nessa época como engenheiro, dirigindo uma fábrica de armamentos do exército francês no Egito.

Voltando à França em 1812, Fourier desenvolveu, na sua obra "Memorial", uma teoria sobre a condução do calor, tornando-se precursor da Física-Matemática. Neste último estudo, o matemático francês foi levado a criar um novo tipo de desenvolvimento em série, diferente do método de Taylor por empregar funções periódicas em vez de potências, e que recebeu seu nome.

Em 1830, morreu Fourier, vítima de um aneurisma cerebral,

I. INTROOUÇÃO

Para cada $x \neq \frac{k\pi}{2}$ definimos sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x. Vamos mostrar agora que esses seis números guardam entre si certas relações denominadas relações fundamentais. Mais ainda, mostraremos que a partir de um deles sempre é possível calcular os outros cinco.

II. RELAÇÕES FUNOAMENTAIS

36. Teorema

Para todo x real vale a relação:

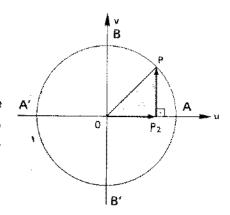
$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Demonstração

a) Se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então existe o triângulo OP_2P retângulo, portanto:

$$|\overline{OP}_2|^2 + |\overline{P}_2\overline{P}|^2 = |\overline{OP}|^2$$

$$e \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$



b) Se $x = \frac{k\pi}{2}$, podemos verificar diretamente a tese:

×	şen x	eos x	sen ² x + cos ² x
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	1
<u>3π</u> 2	1	0	4

37. Teorema

Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:

$$tg x = \frac{sen x}{cos x}$$

Demonstração

a) Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:

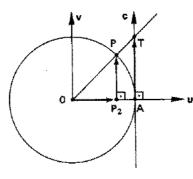
$$\triangle OAT \sim \triangle OP_2P$$

$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_0|}$$

$$|tg.x| = \frac{|sen x|}{|cos x|}$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da tg x é igual ao do quociente $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ 2

De (1) e (2) decorre a tese



a	sinal de tg x	sinal de sen x cos x
1º	+	.
20		_
30	+	4.
40	-	

b) Se $x = k\pi$, temos:

$$tg x = 0 = \frac{sen x}{cos x}$$

38. Teorema

Para todo x real, x ≠ kπ, vale a relação:

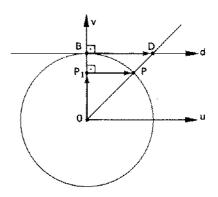
$$\cot g \ x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Demonstração

a) Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:

$$\triangle OBD \sim \triangle OP_1P$$

$$|\cos x| = \frac{|\cos x|}{|\sin x|}$$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da cotg x é igual ao sinal do quociente

(2)

α	sinal de cotg x	sinal de <u>cos x</u> sen x
10	+	4-
20	175	
36	+	+
40	189	**

b) Se
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
, termos $\cot x = 0 = \frac{\cos x}{\sin x}$

39. Teorema

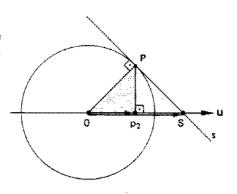
Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação

Demonstração

a) Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:

$$\frac{\Delta OPS}{|\overline{OP}|} \sim \frac{\Delta OP_2P}{|\overline{OP}|}$$

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|}$$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de $\sec x$ é igual ao sinal de $\cos x$ (2).

0	sinal de sec x	sinal de cos x		
10	+	+		
20	***	3 44 4		
30				
 4 <u>0</u>	+	+		

b) Se $x = k\pi$, temos $\sec x = 1 = \cos x$ (k par) ou $\sec x = -1 = \cos x$ (k impar).

40. Teorema

Para todo x real, x ≠ kπ, vale a relação:



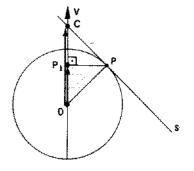
Demonstração

a) Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:

$$\Delta OPC \sim \Delta OP_1P$$

$$\frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP}_1|}$$

$$|cossec x| = \frac{1}{|sen x|}$$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de cossec x é igual ao sinal de sen x (2).

De 1 e 2 decorre a tese.

a	sinal de cossec x	sinal de sen x
19	+	+
20	+	+
30	-	m·
4º	***	**

b) Se
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
, temos:

cossec
$$x = 1 = \frac{1}{\text{sen } x}$$
 (k par)

OH

cossec
$$x = -1 = \frac{1}{\text{sen } x}$$
 (k impar)

41. Corolário

Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$\cot g \times = \frac{1}{tg \times}$$

$$tg^2 \times + 1 = \sec^2 \times$$

$$1 + \cot g^2 \times = \csc^2 \times$$

$$\cos^2 \times = \frac{1}{1 + tg^2 \times}$$

$$\sec^2 \times = \frac{tg^2 \times}{1 + tg^2 \times}$$

Demonstração

$$\cot g \, x \, = \, \frac{\cos x}{\sin x} \, = \, \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \, = \, \frac{1}{tg \, x}$$

$$tg^2 x + 1 \, = \, \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, + 1 \, = \, \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, = \, \frac{1}{\cos^2 x} \, = \sec^2 x$$

$$1 + \cot g^2 x \, = \, 1 + \, \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, = \, \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \, = \, \frac{1}{\sin^2 x} \, = \, \csc^2 x$$

$$\cos^2 x \, = \, \frac{1}{\sec^2 x} \, = \, \frac{1}{1 + tg^2 x}$$

$$\sec^2 x \, = \, \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, = \, \cos^2 x \cdot tg^2 x \, = \, \frac{1}{1 + tg^2 x} \cdot tg^2 x \, = \, \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$$

EXERCÍCIOS

Sabendo que sen x = $\frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2}$ < x < π , calcular as demais funções circulares de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \implies \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$tg x = \frac{sen x}{cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{3}{E}} = -\frac{5}{3}$$

cossec
$$x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

C.24 Sabendo que cossec x = $-\frac{25}{24}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x.

C.75 Sabendo que tg x = $\frac{12}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x.

Solução

$$\cot g \times = \frac{1}{t_0 \times} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

Notando que $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \sec x < 0$, temos:

$$\sec x = -\sqrt{1 + tg^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{144}{25}} = -\sqrt{\frac{169}{25}} = -\frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\frac{13}{5}} = -\frac{5}{13}$$

$$sen x = tg x \cdot cos x = (\frac{12}{5}) (-\frac{5}{13}) = -\frac{12}{13}$$

cossec x =
$$\frac{1}{\text{sen x}} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

C76 Calcular cos x sabendo que cotg x = $\frac{2\sqrt{m}}{m-1}$ com m > 1.

C.77 Calcular sec x sabendo que sen x = $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ com a > b > 0.

C.78 Sabendo que sec x = 3, calcular o valor da expressão $y = sen^2 x + 2 \cdot tg^2 x$

Solução

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{3}$$

$$sen^2x = 1 - cos^2x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$tq^2x = sec^2x - 1 = 9 - 1 = 8$$

então

$$y = sen^2 x + 2 \cdot tg^2 x = \frac{8}{9} + 16 = \frac{152}{9}$$

Sendo sen x = $\frac{1}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular o valor de

$$y = \frac{1}{\cos\sec x + \cot g x} + \frac{1}{\csc x - \cot g x}.$$

C.80 Sabendo que $\cot x = \frac{24}{7}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular o valor da expressão

$$y = \frac{tg \times cos \times}{(1 + cos \times)(1 + cos \times)}$$

Solução 1

Calculamos tg x, cos x e finalmente y:

$$tg \times = \frac{1}{\cot g \times} = \frac{7}{24}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{49}{576}} = \frac{576}{625} \implies \cos x = -\frac{24}{25}$$

$$y = \frac{19 \times \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{(\frac{7}{24})(-\frac{24}{25})}{(1 - \frac{24}{25})(1 + \frac{24}{25})} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{49}{625}} = -\frac{25}{7}$$

Solução 2

Simplificamos y e depois calcularnos o que for necessário:

$$y = \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen } x} = \cos x = \frac{1}{7}$$

$$= -\sqrt{1 + \cot^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{576}{49}} = -\frac{25}{7}$$

Dado que $\cos x = \frac{2}{5} = \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obter o valor de $y = (1 + tq^2x)^2 + (1 - tq^2x)^2$.

C.82 Calcular sen x e cos.x sabendo que $3 \cdot \cos x + \sin x = -1$.

Solução

Vamos resolver o sistema:

$$(2) \cos^2 x + \sin^2 x =$$

De (1) verns sen
$$x = -1 - 3 \cdot \cos x$$
 (1)

Substituindo (1) em (2) resulta:

$$\cos^2 x + (-1 - 3 \cdot \cos x)^2 = 1$$

isto é

$$\cos^2 x + 1 + 6 \cdot \cos x + 9 \cdot \cos^2 x = 1$$

ou ainda

$$10 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \cos x = 0 \quad \text{então} \quad \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{3}{5}.$$

Substituindo cada uma dessas alternativas em (1), encontramos:

$$sen x = -1 - 3 \cdot 0 = -1$$
 ou $sen x = -1 - 3 \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$

Assim, temos dues soluções:

οu

2a)
$$\cos x = -\frac{3}{5} e \sin x = \frac{4}{5}$$

C88 Calcular sen x e cos x sabendo que $6 \cdot \sec x - 3 \cdot tg^2 x = 1$.

C.84 Obter tg x sabendo que
$$sen^2 x - 5 \cdot sen x \cdot cos x + cos^2 x = 3$$
.

C.85 Calcular in de modo que se tenha sen x = 2m + 1 e $\cos x = 4m + 1$.

Solução

Como $sen^2x + cos^2x = 1$, resulta:

$$(2m + 1)^2 + (4m + 1)^2 = 1 \implies (4m^2 + 4m + 1) + (16m^2 + 8m + 1) = 1$$

 $\implies 20m^2 + 12m + 1 = 0 \implies m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{40}$

$$=\frac{-12\pm8}{40}$$
 \implies m = $-\frac{1}{2}$ ou m = $-\frac{1}{10}$

- **C.86** Calcular m de modo que se tenha tg x = m 2 e cotg x = $\frac{m}{3}$
- C.87 Determinar a de modo que se tenha $\cos x = \frac{1}{a+1}$ e $\csc x = \frac{a+1}{\sqrt{a+2}}$
- C.88 Determinar uma relação entre x = y, independente de t, sabendo que $x = 3 \cdot \text{sen t} = y = 4 \cdot \cos t$.

Solução

Como sen²t + cos²t = 1, resulta:

$$(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{4})^2 = 1 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \implies 16x^2 + 9y^2 = 144$$

C.89 Determinar uma relação entre x = y, independente de t, sabendo que $x = 5 \cdot t q t = y = 3 \cdot cossec t$.

Solução

Como cossec²t = cotg²t + 1 e cotg t = $\frac{1}{\text{tg t}}$, resulta: $(\frac{y}{3})^2 = (\frac{5}{x})^2 + 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{9} = \frac{25}{x^2} + 1 \Longrightarrow x^2y^2 = 225 + 9x^2 \Longrightarrow x^2y^2 = 9x^2 = 225.$

- C.90 Se sen $x + \cos x = a$ e sen $x + \cos x = b$, obter uma relação entre a e b, independente de x.
- C.91 Dado que sen $x \cdot \cos x = m$, calcular o valor de $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ e $z = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Solução

Como $a^2 + b^2 \equiv (a + b)^2 - 2ab$, temos: $y = (sen^2x)^2 + (cos^2x)^2 = (sen^2x + cos^2x)^2 - 2 \cdot sen^2x \cdot cos^2x =$ $= 1^2 - 2 \cdot (sen \times \cdot cos \times)^2 = 1 - 2m^2$. Como $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, temos: $z = (sen^2x)^3 + (cos^2x)^3 = (sen^2x + cos^2x)(sen^4x - sen^2x \cdot cos^2x + cos^4x) =$

$$= \sec^4 x + \cos^4 x - \sec^2 x \cdot \cos^2 x = y - (\sec x \cdot \cos x)^2 =$$

$$= 1 - 2m^2 - m^2 = 1 - 3m^2$$

C.92 Sabendo que sen x + cos x = a (a dado), calcular y = $sen^3 x + cos^3 x$.

III. IDENTIDADES

42. Definição

Sejam f e g duas funções de domínios D_1 e D_2 , respectivamente. Dizemos que f é idêntica a g, e indicamos $f \equiv g$, se, e somente se, f(x) = g(x) para todo x em que ambas as funções estão definidas. Colocando em símbolos:

$$f \equiv g \iff f(x) = g(x), \forall x \in D_1 \cap D_2$$

43. Exemplos

- 1?) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (x + 1)^2 (x 1)^2$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g(x) = 4x são idênticas pois: $f(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x = g(x), <math>\forall x \in \mathbb{R}$.
- 2?) f: $|R \to |R|$ tal que f(x) = x + 1 e g: $|R - \{1\} \to |R|$ tal que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ são idênticas pois: $g(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1 = f(x), \forall x \in |R - \{1\}$
- 39) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin^2 x$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1 - \cos^2 x$ são idênticas pois: $f(x) = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
- 49) f: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sec^2 x tg^2 x$ e g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g(x) = 1 são idênticas pois: $f(x) = \sec^2 x tg^2 x = (1 + tg^2 x) tg^2 x = 1 = g(x)$ para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

IV. DEMONSTRAÇÃO DE IDENTIDADE

- 44. Para demonstrarmos uma identidade trigonomètrica podemos aplicar qualquer uma das fòrmulas (que são também identidades) estabelecidas na teoria, a saber: as relações fundamentais, as fòrmulas de redução, as de adição, as de multiplicação, as de divisão e as de transformação em produto. É evidente que na série de exercicios seguinte só podemos usar as relações fundamentais.
- **45.** Existem basicamente três processos para provar uma identidade. Conforme a dificuldade da demonstração escolhemos o método mais adequado entre os seguintes:
- 19) partimos de um dos membros (geralmente o mais complicado) da identidade e o transformamos no outro.
- 2º) transformamos o 1º membro (f) e, separadamente, o 2º membro (g), chegando com ambos na mesma expressão (h). A validade deste método é justificada pela propriedade:

$$\begin{cases}
f = h \\
g = h
\end{cases}$$

$$\Rightarrow f = g$$

3.0) construímos a função h = f - g e provamos que $h \equiv 0$. A validade deste mètodo é justificada pela propriedade:

$$f - g \equiv 0 \iff f \equiv g$$

EXERCICIOS

C.93 Provar que $(1 + \cot^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$ para todo x real. $x \neq k\pi$

Solução

$$f(x) = (1 + \cos^2 x)(1 - \cos^2 x) = (1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) \cdot \sin^2 x =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = 1 = g(x).$$

C.94 Provar que
$$2 \cdot \sec x \cdot \tan x = \frac{1}{\cos \sec x - 1} + \frac{1}{\cos \sec x + 1}$$
 para todo x real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Solucão

$$g(x) = \frac{1}{\cos\sec x - 1} + \frac{1}{\csc\sec x + 1} = \frac{(\csc x + 1) + (\csc x - 1)}{(\csc x - 1) (\csc x + 1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \csc x}{\csc^2 x - 1} = \frac{2 \cdot \csc x}{\cot^2 x} = \frac{2}{\sec x} \cdot \frac{\sec^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sec x}{\cos x} = 2 \cdot \sec x \cdot tg = t(x).$$

C.95 Provar que $(1 - tg x)^2 + (1 - \cot g x)^2 = (\sec x - \csc x)^2$. para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Solucão

$$f(x) = (1 - tg x)^{2} + (1 - \cot g x)^{2} = (1 - \frac{\sin x}{\cos x})^{2} + (1 - \frac{\cos x}{\sin x})^{2} =$$

$$= (\frac{\cos x - \sin x}{\cos x})^{2} + (\frac{\sin x - \cos x}{\sin x})^{2} = \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^{2} x} +$$

$$+ \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin^{2} x} = (1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x) (\frac{1}{\cos^{2} x} + \frac{1}{\sin^{2} x}) =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^{2} x \cdot \sin^{2} x} = h(x).$$

$$g(x) = (\sec x - \csc x)^2 = (\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sec x})^2 =$$

$$= (\frac{\sec x - \cos x}{\cos x \cdot \sec x})^2 = \frac{1 - 2 \cdot \sec x \cdot \cos x}{\cos^2 x \cdot \sec^2 x} = h(x)$$

C.96 Provar que $\frac{1-\cos x}{\sin x \cdot \cos x} + \sin x = \frac{1-\cos x}{\tan x} + \tan x$ para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Solução

$$f(x) - g(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x + \cos x} + \sin x - \frac{1 - \cos x}{tg x} - tg x =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x + \cos x} + \sin x - \frac{\cos x (1 - \cos x)}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1 - \cos x + \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x + (1 - \cos x) - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1 - \cos x + (1 - \cos^2 x) + \cos x - \cos^2 x (1 - \cos x) - (1 - \cos^2 x)}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = 0$$

Demonstrar as identidades seguintes:

C.97
$$\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cdot (\sin x \cdot \cos x)^2 = 1$$

C.101
$$sec^2 x + cossec^2 x = sec^2 x + cossec^2 x$$

$$C.102 \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \cos^2 x$$

$$C.103 \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = 1 + \sin x \cdot \cos x$$

$$C.104 \operatorname{cossec}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x$$

C.105 2(sen x + tg x)(cos x + cotg x) =
$$\{1 + \text{sen } x + \cos x\}^2$$

C.107
$$\frac{1 - 2 \cdot \cos^2 x + \cos^4 x}{1 - 2 \cdot \sin^2 x + \sin^4 x} = 10^4 x$$

C.108
$$(\cot x - \cos x)^2 + (1 - \sin x)^2 = (1 - \csc x)^2$$

C.109
$$\frac{\cos x + \cos y}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos y - \cos x}$$

C.110
$$\frac{\cos x + \cot g x}{\tan x + \sec x} = \cos x \cdot \cot g x$$

C.111
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cot^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} + 1 = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y$$

$$C.112 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\csc x - \cot x)^2$$

C.113
$$\frac{\cot g \times + \cot g y}{\tan x + \tan y} = \cot g \times \cdot \cot g y$$

C.114
$$(\sec x \cdot \sec y + tg x \cdot tg y)^2 = 1 + (\sec x \cdot tg y + \sec y \cdot tg x)^2$$

C.115 sec x - tg x =
$$\frac{1}{\sec x + \tan x}$$

C.116
$$cossec^6 x - cotg^6 x = 1 + 3 \cdot cotg^2 x \cdot cossec^2 x$$
.

CAPÍTULO IV

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de x, com x não pertencente ao 1º quadrante, relacionando x com algum elemento do 1º quadrante. A meta é ficar conhecendo sen x, cos x e tg x a partir de uma tabela que dê as funções circulares dos reais entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

I. REDUÇÃO DO 2º AO 1º OUADRANTE

46. Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos senos. Temos:

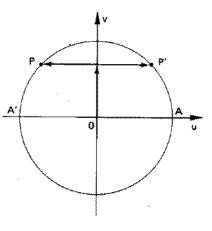
$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA'} = \pi$$
 (no sentido anti-horário)
e, como $\overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{PA'}$, vem:
 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} = \pi$

portanto
$$\widehat{AP}' = \pi - x$$
.

É imediato que:

$$sen x = sen (\pi - x)$$

$$cos x = -cos (\pi - x)$$



47. Levando em conta as relações fundamentais, decorre:

$$tg \times = \frac{sen x}{cos x} = \frac{sen (\pi - x)}{-cos (\pi - x)} = -tg (\pi - x)$$

$$\cot x = -\cot x (\pi - x)$$

$$sec x = -sec (\pi - x)$$

$$cossec x = cossec (\pi - x)$$

48. Assim, por exemplo, temos:

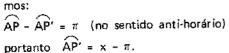
sen
$$115^{\circ}$$
 = sen $(180^{\circ} - 115^{\circ})$ = sen 65° cos 130° = -cos $(180^{\circ} - 130^{\circ})$ = -cos 50°

$$tg \frac{2\pi}{3} = -tg (\pi - \frac{2\pi}{3}) = -tg \frac{\pi}{3}$$

$$\cot g \frac{4\pi}{5} = -\cot g \left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cot g \frac{\pi}{5}$$

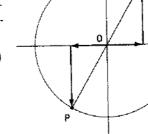
II. REDUÇÃO DO 3º AO 1º QUAORANTE

49. Dado o número real x tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao centro. Tempos



$$sen x = -sen (x - \pi)$$

$$\cos x = -\cos (x - \pi)$$



50. Em consequência temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{-\operatorname{sen} (x - \pi)}{-\operatorname{cos} (x - \pi)} = \operatorname{tg} (x - \pi)$$

$$\cot x = \cot x - \pi$$

$$sec x = -sec (x - \pi)$$

$$cossec x = -cossec (x - \pi)$$

51. Assim, por exemplo, temos:

$$sen 210^{\circ} = -sen (210^{\circ} - 180^{\circ}) = -sen 30^{\circ}$$

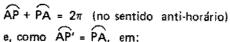
 $cos 225^{\circ} = -cos (225^{\circ} - 180^{\circ}) = -cos 45^{\circ}$

$$tg \frac{4\pi}{3} = tg (\frac{4\pi}{3} - \pi) = tg \frac{\pi}{3}$$

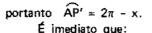
$$\sec \frac{7\pi}{6} = -\sec \left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\sec \frac{\pi}{6}$$

III. REOUÇÃO OO 4º AO 1º OUADRANTE

52. Dado o número real x tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, seja P a Imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos cossenos. Temos:







sen
$$x = -sen(2\pi - x)$$

$$\cos x = \cos (2\pi - x)$$

53. Em consequência temos:

$$tg x = \frac{sen x}{cos x} = \frac{-sen (2\pi - x)}{cos (2\pi - x)} = -tg (2\pi - x)$$

$$\cot g \ x = -\cot g \ (2\pi - x)$$

$$\sec x = \sec (2\pi - x)$$

$$cossec x = -cossec (2\pi - x)$$

54. Assim, por exemplo, temos:

$$sen 280^{\circ} = -sen (360^{\circ} - 280^{\circ}) = -sen 80^{\circ}$$

$$cos 340^{\circ} = cos (360^{\circ} - 340^{\circ}) = cos 20^{\circ}$$

$$tg \frac{11\pi}{6} = -tg (2\pi - \frac{11\pi}{6}) = -tg \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{cossec}(2\pi - \frac{5\pi}{3}) = -\operatorname{cossec}(\frac{\pi}{3})$$

EXERCICIOS

C.117 Reduzir ac 1º quadrante:

al
$$\cos 178^{\circ}$$

d) coty
$$\frac{7\pi}{6}$$

f) cossec
$$\frac{23\pi}{6}$$

g) sen
$$(-\frac{7\pi}{6})$$
 h) cos $(-\frac{5\pi}{3})$

h)
$$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$$

i)
$$tg = \frac{3\pi}{4}$$

j) sen
$$\frac{21\pi}{4}$$

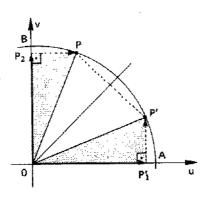
k)
$$\cos \frac{31\pi}{6}$$

IV. REDUÇÃO DE $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ A $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

55. Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo simétrico de P em relação à bissetriz do 1º quadrante, Temos:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{P8} = \frac{\pi}{2}$$
 (no sentido anti-horário)
e. como $\overrightarrow{P8} = \overrightarrow{AP}'$, vem:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2}$$
, então $\widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} - x$.



Considerando a congruência dos triângulos OPP2 e OP'P1, temos:

$$\overline{OP_2} = \overline{OP_1'} \implies \operatorname{sen} x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
 $\overline{P_2P} = \overline{P_1'P'} \implies \cos x = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Em conseqüência, temos:

$$tg \times = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin (\frac{\pi}{2} - x)} = \cot (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\cot g \, x \, = \, tg \, (\frac{\pi}{2} \, - \, x)$$

$$\sec x = \csc \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$cossec x = sec \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

57. Assim, por exemplo, temos:

$$sen 71^{\circ} = cos (90^{\circ} - 71^{\circ}) = cos 19^{\circ}
cos 60^{\circ} = sen (90^{\circ} - 60^{\circ}) = sen 30^{\circ}
tg 50^{\circ} = cotg (90^{\circ} - 60^{\circ}) = cotg 40^{\circ}
sen $\frac{\pi}{3} = cos (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = cos \frac{\pi}{6}$

$$cos \frac{5\pi}{12} = sen (\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}) = sen \frac{\pi}{12}$$$$

$$\operatorname{tg} \ \frac{3\pi}{8} = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = \operatorname{cotg} \ \frac{\pi}{8}$$

EXERCÍCIO

C.118 Reduzir so intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$:

h) cos
$$\frac{7\pi}{6}$$

i) tg
$$\frac{11\pi}{6}$$

j) sen
$$\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$$

k)
$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$$

1) tg
$$\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$$

V. IDENTIDADES

Ao procurar resolver problemas de redução ao 19 quadrante estabelecemos igualdades notáveis. Por exemplo, mostramos que se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ então sen $x = \sin(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$. Vamos agora estender essas igualdades para todo x real.

58. Teorema

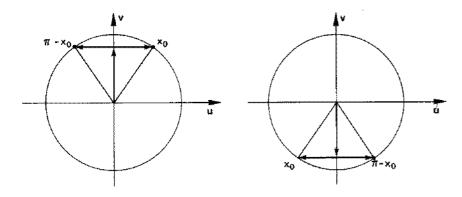
Para todo' x real valem as seguintes igualdades:

1) sen x = sen
$$(\pi - x)$$
 e cos x = $-\cos(\pi - x)$

2) sen x = -sen (x -
$$\pi$$
) e cos x = $+\cos(x - \pi)$

3) sen x = -sen
$$(2\pi - x)$$
 e $\cos x = \cos (2\pi - x)$

4) sen x = cos
$$(\frac{\pi}{2} - x)$$
 e cos x = sen $(\frac{\pi}{2} - x)$



Demonstração

1) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x = x_0 + 2k\pi$ onde $0 \le x_0 \le 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. Assim, $\pi - x = (\pi - x_0) - 2k\pi$ o que mostra que $x \in \pi - x$ têm imagens no ciclo simétricas em relação ao eixo dos senos.

Em consequência temos:

$$sen(\pi - x) = sen x$$
, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos (\pi - x) = -\cos x$$
, $\forall x \in \mathbb{R}$

2), 3) e 4) provam-se analogamente.

EXERCÍCIOS

C.119 Simplificar as seguintes expressões:

a) sen
$$(\frac{\pi}{2} + x)$$

b)
$$\cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

c) sen
$$(\frac{3\pi}{2} - x)$$

d)
$$\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$$

e) sen
$$(\frac{3\pi}{2} + x)$$

f)
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

Solucão

a)
$$sen(\frac{\pi}{2} + x) = sen[\pi - (\frac{\pi}{2} + x)] = sen(\frac{\pi}{2} - x) = cos x$$

b)
$$\cos (\frac{\pi}{2} + x) = -\cos [\pi - (\frac{\pi}{2} + x)] = -\cos (\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$$

c) sen
$$(\frac{3\pi}{2} - x) = -\text{sen}[(\frac{3\pi}{2} - x) - \pi] = -\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$$

d)
$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos \left[\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \pi\right] = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

e) sen
$$(\frac{3\pi}{2} + x) = -\text{sen}[2\pi - (\frac{3\pi}{2} + x)] = -\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$$

f)
$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos \left[2\pi - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

C.120 Simplificar
$$y = \frac{\operatorname{sen}(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) \cdot \cot g(\frac{3\pi}{2} - x)}$$

Solucão

$$V = \frac{(-\sin x)(-\cos x)}{(-\cot x)(\tan x)} = -\sin x \cdot \cos x$$

C.121 Simplificar as expressões:

a)
$$\frac{\operatorname{sen}(-x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + x)}{\operatorname{tg}(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}$$

b)
$$\frac{\text{sen } (180^{\circ} - x) \cdot \text{tg } (90^{\circ} + x)}{\text{cotg } (270^{\circ} + x) \cdot \text{cos } (270^{\circ} - x)}$$

c)
$$\frac{\sec{(\pi - x)} \cdot \tan{(x - \frac{x}{2})}}{\csc{(9\pi - x)} \cdot \cot{(-x)}}$$

d) sen
$$(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(4\pi - x) + \tan(\frac{3\pi}{2} - x)$$

C.122 (MAPOFEI-76) Simplificar a expressão:

$$sen(\frac{9\pi}{2}) - cos(x + \frac{15\pi}{2}) \cdot sen(7\pi - x).$$

C.123 (MAPOFEI-74) Simplificar a expressão:

C,124 (MAPOFEI-74) Simplificar a expressão:

$$\frac{a^2 \cos 180^\circ - (a - b)^2 \sin 270^\circ + 2 ab \cos 0^\circ}{b^2 \sin 90^\circ}$$

C.125 (MAPOFEI-76) Fazer o gráfico de função $\gamma = \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$.

VI. FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES IMPARES

59. Definição

Uma função f:A → B, é denominada função par se, e somente se:

$$f(x) = f(-x), \forall x \in A$$

isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos o mesmo valor para a função.

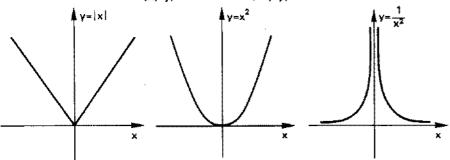
Exemplos

29)
$$f(x) = x^2$$
 é função par pois $(-x)^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

3°)
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
 é função par pois $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Da definição decorre que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y pois:

$$(x, y) \in f \longrightarrow (-x, y) \in f$$



60. Definição

Uma função f:A → 8, é denominada função impar se, e somente se:

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in A$$

isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos valores simétricos para a função.

Exemplos

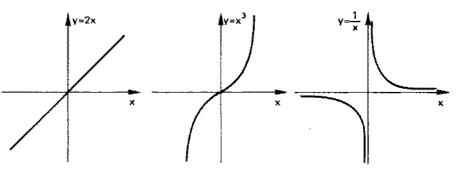
19)
$$f(x) = 2x$$
 é função (mpar pois $2(-x) = -2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2°)
$$f(x) = x^3$$
 é função (mpar pois $(-x)^3 = -x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$

3%)
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
 é função (mpar pois $\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Da definição decorre que o gráfico de uma função impar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano pois:

$$(x, y) \in f \longrightarrow (-x, -y) \in f$$



61. Os números x e →x têm, no ciclo, imagens simétricas em relação ao elxo dos cossenos. Em conseqüência, temos:

$$sen(-x) = -sen x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

portanto, de acordo com as definições dadas, a função seno é função (mpar e a função cosseno é função par.

TÁBUA DE VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Graus	Radianos	Seno	Tangente	Cotang.	Co-seno		
0°	0,0000	0,0000	0,0000		1,0000	1,5708	90°
1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° 8° 9° 11° 12° 13° 14° 15° 20° 22° 23° 25° 26° 27° 30° 31° 32° 33° 33° 33°	0,0175 0,0349 0,0524 0,0698 0,0873 0,1047 0,1222 0,1396 0,1571 0,1745 0,1920 0,2094 0,2269 0,2443 0,2618 0,2793 0,2967 0,3142 0,3316 0,3491 0,3665 0,3840 0,4014 0,4189 0,4363 0,4712 0,4887 0,5061 0,5236 0,5793 0,5961 0,5983 0,6807	0,0175 0,0349 0,0523 0,0698 0,0872 0,1045 0,1219 0,1392 0,1584 0,1736 0,1908 0,2250 0,2419 0,2588 0,2756 0,2924 0,3090 0,3256 0,3420 0,3584 0,3746 0,3907 0,4067 0,4067 0,4695 0,4648 0,5000 0,5446 0,5000 0,5446 0,5592 0,5736 0,5878 0,6018 0,6157 0,6293	0.0175 0.0349 0.0524 0.0699 0.0875 0.1051 0.1228 0.1405 0.1584 0.1763 0.1944 0.2128 0.2309 0.2493 0.2679 0.3640 0.3639 0.3640 0.3839 0.4452 0.4452 0.4452 0.4452 0.452 0.5543 0.5774 0.6009 0.6249 0.6249 0.6249 0.6249 0.6249 0.6249 0.7002 0.7265 0.7813 0.8098	57,290 28,636 19,081 14,301 11,430 9,5144 8,1443 7,1154 6,3138 5,6713 5,1446 4,7046 4,3315 4,0108 3,7321 3,4874 3,2709 3,0777 2,9042 2,7475 2,4751 2,3559 2,2460 2,1445 2,0503 1,9626 1,8807 1,7321 1,6643 1,6003 1,5399 1,4826 1,4281 1,3764 1,3270 1,2799 1,2349 1,1918	1,0000 0,9998 0,9994 0,9986 0,9976 0,9962 0,9945 0,9925 0,9903 0,9877 0,9848 0,9761 0,9744 0,9703 0,9613 0,9583 0,9515 0,9456 0,9456 0,9456 0,9456 0,9456 0,9466 0,8480 0,8572 0,8480 0,8387 0,8290 0,7986 0,7880 0,7880 0,7771 0,7660	1,5708 1,5533 1,5359 1,5184 1,5010 1,4835 1,4661 1,4488 1,4312 1,4137 1,3963 1,3788 1,3814 1,3439 1,3265 1,3090 1,2915 1,2741 1,2566 1,2392 1,2217 1,2043 1,1868 1,1694 1,1519 1,1345 1,1170 1,0996 1,0821 1,0647 1,0472 1,0297 1,0123 0,9948 0,9774 0,9599 0,9425 0,9250 0,9076 0,8727	90° 89° 88° 85° 85° 85° 85° 77° 76° 77° 76° 78° 71° 89° 66° 66° 66° 59° 55° 55° 50°
40° 41° 42° 43° 44°	0,6981 0,7158 0,7330 0,7505 0,7879 0.7854	0,6428 0,8561 0,6891 0,6820 0,6947 0,7071	0,8391 0,8693 0,9004 0,9325 0,9657 1,0000	1,1504 1,1106 1,0724 1,0355 1,0000	0,7547 0,7431 0,7314 0,7193 0,7071	0.8552 0.8378 0.8203 0.8029 0.7854	49° 48° 47° 46° 45°
45°	0,7604	Coseno		Tangente	Seno	Radianos	Graus

CAPÍTULO V

ARCOS NOTÁVEIS

Verificaremos no que segue que as funções circulares dos reais $x=\frac{\pi}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ e $n\geqslant 3$, podem ser calculadas a partir de ℓ_n , lado do polígono regular de n lados inscrito no ciclo.

I. TEOREMA

Para todo n ∈ Ni e n ≥ 3, vale a relação

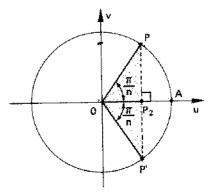
$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\ell_n}{2}$$

Demonstração

Seja
$$A\widehat{O}P=A\widehat{O}P'=\frac{\pi}{n}$$
.
 Como $P'\widehat{O}P=\frac{2\pi}{n}$, decorre que $P'P=\ell_n$.

No triângulo isósceles P'OP o eixo dos cossenos é bissetriz e também altura e mediana, isto é, P'P 1 u e P₂ é ponto médio de P'P. Então

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \overline{P_2P} = \frac{\ell_n}{2}$$



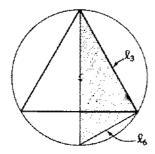
II. APLICAÇÕES

Os casos mais comuns de aplicação desta teoria são aqueles em que $n=3,\,4\,e\,6.$

62. Valores das funções em $\frac{\pi}{3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo assinalado na figura:

$$\ell_3^2 + \ell_6^2 = (2R)^2$$
 $\ell_3^2 + R^2 = 4R^2$
 $\ell_3^2 = 3R^2$



$$\ell_3 = R\sqrt{3}$$

Notando que o raio do ciclo é R = 1, temos:

sen
$$\frac{\pi}{3} = \frac{\ell_3}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Em conseqüência, vem:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$tg \frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

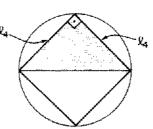
63. Valores das funções em $\frac{\pi}{4}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo assinalado na figura:

$$\ell_4^2 + \ell_4^2 = (2R)^2$$

$$.2\ell_4^2 = 4R^2$$

$$\ell_2^2 = 2R^2$$



Temos, então:

sen
$$\frac{\pi}{4} = \frac{\ell_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

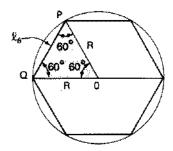
Em consequência, vem:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

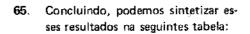
$$tg \ \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

64. Valores das funções em $\frac{\pi}{6}$

Sendo PQ = \hat{x}_6 o lado do hexágono regular inscrito, o triângulo OPQ é equilátero e, então:



Temos, então:



	<u>π</u>	<u>π</u> 4	<u>11</u> 3
seno	1 2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1 2
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	√3

EXERCÍCIOS

C.126 Calcular sen 15°, cos 15° e to 15°.

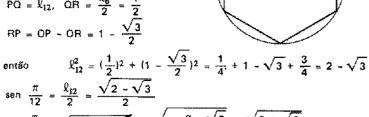
Solução

sen 15° = sen
$$\frac{\pi}{12} = \frac{\hat{k}_{12}}{2}$$

Calculemos X₁₂ no triángulo POR:

$$PQ = \hat{k}_{12}, QR = \frac{\hat{k}_6}{2} = \frac{1}{2}$$

$$RP = OP - OR = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\sec \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\pi}{12}} = \sqrt{\frac{\pi}{12}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$tg \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

C.127 Calcular sen
$$\frac{\pi}{8}$$
, cos $\frac{\pi}{8}$ e tg $\frac{\pi}{8}$.

C.128 Determinar os elementos do conjunto $A = \{x = tg \mid \frac{k\pi}{2} \mid k \in Z\},$

Solucão

Dando valores a k, temos:

$$k = 0 \implies x = tg 0 = 0$$

$$k = 1 \implies x = tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$k = 2 \implies x = tg \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$k = 3 \implies x = tq \pi = 0$$

$$k = 4 \implies x = tg \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$k = 5 \longrightarrow x = tg \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$k = 6$$
 \Rightarrow $x = tg 2\pi = 0$ (repetição) então $A = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

C.129 Determinar A \(\Omega\) B sabendo que:

$$A = \{x = \text{sen } \frac{k\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad B = \{x = \cos \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

C.130 (MAPOFEI-74) Calcular todas as funções trigonométricas de um arco de 930°.

CAPÍTULO VI

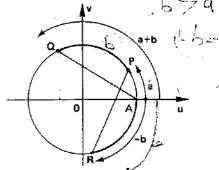
TRANSFORMAÇÕES

I. FÓRMULAS DE ADICÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas da soma (a + b) e da diferenca (a - b) de dois números reals quaisquer a e b, conhecidas as funções circulares de a e de b.

Cosseno da soma

Seiam P. Q e R os pontos do ciclo associados aos números a, a + b e -b, respectivamente. Em relação ao sistema cartesiano u0v as coordenadas desses pontos são:



Os arcos AQ e RP têm a mesma medida, portanto, as cordas AQ e PR são iguais, Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos da Geometria Analítica, temos:

$$d_{AQ}^{2} = (x_{Q} - x_{A})^{2} + (y_{Q} - y_{A})^{2} =$$

$$= [\cos (a + b) - 1]^{2} + [\sin (a + b) - 0]^{2} =$$

$$= \cos^{2} (a + b) - 2 \cdot \cos (a + b) + 1 + \sin^{2} (a + b) =$$

$$= 2 - 2 \cdot \cos (a + b)$$

$$d_{RP}^{2} = (x_{P} - x_{R})^{2} + (y_{P} - y_{R})^{2} =$$

$$= [\cos a - \cos b]^{2} + [\sin a + \sin b]^{2} =$$

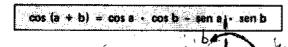
$$= \cos^{2} a - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos^{2} b + \sin^{2} a + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b +$$

$$+ \sin^{2} b = 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b$$

$$d_{AQ} = d_{RP} \Longrightarrow 2 - 2 \cdot \cos (a + b) = 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b +$$

$$+ 2 \cdot \sin a \cdot \sin b$$

e, então, vem a fórmula:



67. Cosseno da diferença

$$cos(a - b) = cos[a + (-b)] = cos a \cdot cos(-b) - sen a \cdot sen (-b) =$$

= $cos a \cdot cos b - sen a \cdot (-sen b)$

então

68. Sano da soma

sen (a + b) = cos
$$[\frac{\pi}{2} - (a + b)] = cos [(\frac{\pi}{2} - a) - b] =$$

= cos $(\frac{\pi}{2} - a) \cdot cos b + sen (\frac{\pi}{2} - a) \cdot sen b$

então

69. Seno da diferença

$$sen (a - b) = sen [a + (-b)] = sen a \cdot cos (-b) + sen (-b) \cdot cos a =$$

= $sen a \cdot cos b + (-sen b) \cdot cos a$

então

70. Tangente da soma

$$tg (a + b) = \frac{sen (a + b)}{cos (a + b)} = \frac{sen a \cdot cos b + sen b \cdot cos a}{cos a \cdot cos b - sen a \cdot sen b} =$$

$$\frac{sen a \cdot cos b + sen b \cdot cos a}{cos a \cdot cos b} = \frac{cos a \cdot cos b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot cos b}{cos a \cdot cos b} + \frac{sen b \cdot cos a}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot cos b}{cos a \cdot cos b} + \frac{sen b \cdot cos a}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot cos b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot sen b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot sen b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot sen b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot sen b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot sen b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot sen b}{cos a \cdot cos b} = \frac{sen a \cdot cos$$

então

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$
, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

71. Tangente da difarença

$$tg (a - b) = tg [a + (-b)] = \frac{tg a + tg (-b)}{1 - tg a \cdot tg (-b)} =$$

$$= \frac{tg a + (-tg b)}{1 - tg a \cdot (-tg b)}$$

então

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$
, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

72. Cotangente da soma

$$\cot g (a + b) = \frac{\cos (a + b)}{\sin (a + b)} = \frac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a} =$$

$$\frac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \sin b} =$$

$$\frac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \sin b} =$$

$$\frac{\cos a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin b} =$$

$$\frac{\cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \sin b} =$$

$$\frac{\cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \sin b} =$$

então

$$\cot g (a + b) = \frac{\cot g a \cdot \cot g b - 1}{\cot g a + \cot g b}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq k\pi$$
, $b \neq k\pi$ e $a + b \neq k\pi$

73. Cotangente da difarença

$$\cot g (a - b) = \cot g [a + (-b)] = \frac{\cot g a \cdot \cot g (-b) - 1}{\cot g a + \cot g (-b)} =$$

$$= \frac{\cot g \cdot a \cdot (-\cot g \cdot b) - 1}{\cot g \cdot a + (-\cot g \cdot b)}$$

então

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq k\pi$$
, $b \neq k\pi$ e $a - b \neq k\pi$

EXERCÍCIOS

C.131 Calcular os valores da:

- a) cos 15°
- b) sen 105°
- c) tg 75°
- d) sec 285°

Solução

a)
$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b)
$$sen 105^\circ = sen (60^\circ + 45^\circ) = sen 60^\circ \cdot cos 45^\circ + sen 45^\circ \cdot cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c)
$$tg 75^\circ = tg (45^\circ + 30^\circ) = \frac{tg 45^\circ + tg 30^\circ}{1 - tg 45^\circ + tg 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

d)
$$\sec 285^\circ = \sec 75^\circ = \frac{1}{\cos 75^\circ} = \frac{1}{\cos (45^\circ + 30^\circ)} = \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

C-132 Calcular cotg 165°, sec 255° e cossec 15°

2.133 (FEI-76) Sendo tg A = 2 e tg B = 1, ache tg (A - B).

C.134 (MAPOFEI-75) Calcular o valor da expressão sen 105° - cos 75°.

C.135 Dados: $\sin x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{5}{13}$, calcular o $\cos (x + y)$, sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.

Solucão

1°} cos x =
$$+\sqrt{1 - \sin^2 x} = +\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$2^{\circ}$$
) sen y = $-\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$

39)
$$\cos (x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} = \frac{66}{65}$$

C.136 Sabendo que tg a = $\frac{2}{3}$ e sen b = $\frac{4}{5}$ com $\frac{\pi}{2}$ < b < π , calcular tg (a + b).

Solução

10)
$$\cos b = -\sqrt{1 - \sin^2 b} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$2^{\circ}$$
) tg b = $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = -\frac{4}{3}$

3°)
$$tg(a + b) = \frac{tg a + tg b}{1 - tg a + tg b} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}(\frac{-4}{3})} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{17}{3}} = \frac{-6}{17}$$

C.137 Sabendo que sen x = $\frac{15}{17}$, sen y = $-\frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$, calcular sen (x + y), $\cos(x + y)$ e tg (x + y).

C.138 Demonstrar as identidades:

a)
$$sen (a + b) \cdot sen (a - b) = cos^2 b - cos^2 a$$
b) $(EPUSP-62)$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
sen x & sen y & sen z \\
cos x & cos y & cos z
\end{vmatrix} = sen (x - y) + sen (y - z) + sen (z - x)$$
c) $cos^2 (a + b) + cos^2 b - 2 \cdot cos (a + b) \cdot cos a \cdot cos b = san^2 a$

Solução

b)
$$I_{-}^{O}$$
 membro = $\begin{vmatrix} \sin y & \sin z \\ \cos y & \cos z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sin x & \sin z \\ \cos x & \cos z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix} =$
= $\sin (y - z) - \sin (x - z) + \sin (x - y) =$
= $\sin (x - y) + \sin (y - z) + \sin (z - x) = 2^{O}$ membro

c) 1.9 membro =
$$(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)^2 + \cos^2 b -2 \cdot (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \cdot \cos a \cdot \cos b =$$
 $= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos a \cdot \cos b + \sin^2 a \cdot \sin^2 b +$
 $+ \cos^2 b - 2 \cdot \cos^2 a \cdot \cos^2 b + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos a \cdot \cos b =$
 $= \sin^2 a \cdot \sin^2 b + \cos^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$
 $= \sin^2 a \cdot (1 - \cos^2 b) - (1 - \sin^2 a) \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$
 $= \sin^2 a - \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 b + \sin^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$
 $= \sin^2 a - \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 b + \sin^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$
 $= \sin^2 a - 29 \text{ membro}$

C.139 (MAPOFEI-75) Demonstrar a identidade:

$$tg (45^{\circ} + x) \cdot cotg (45^{\circ} - x) = \frac{-1 + sen 2x}{1 - sen 2x}$$

C.140 Se a e b são ángulos agudos e positivos, demonstrar que:

Solução

Seja
$$X = sen(a + b) - sen a - sen b = sen a \cdot cos b +$$

+ sen b \cos a - sen a - sen b = sen a (cos b - 1) + sen b (cos a - 1)

Temos:

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \implies sen a > 0 \quad e \quad cos a < 1$$
$$0 < b < \frac{\pi}{2} \implies sen b > 0 \quad e \quad cos b < 1$$

Então

$$\underbrace{\sec a} \cdot \underbrace{(\cos b - 1)} + \underbrace{\sec b} \cdot \underbrace{(\cos a - 1)} \Longrightarrow \times < 0$$

$$> 0 < 0 > 0 < 0$$

$$e \times < 0 \Longrightarrow \sec (a + b) < \sec a + \sec b$$

C.141 (EPUSP-63) Provar que se
$$\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$$
 e $\frac{\pi}{4} < b < \frac{\pi}{2}$. então sen $(a+b) < \sin a + \frac{4}{5}$ sen b

C.142 Provar que os ângulos internos A, B e C de um triângulo não retângulo verificam a relação;

Solução

$$A + B + C = 180^{\circ} \longrightarrow A + B = 180^{\circ} - C \longrightarrow tg(A + B) = tg(180^{\circ} - C) \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{tgA + tgB}{1 - tgA \cdot tgB} = -tgC \longrightarrow tgA + tgB = tgC(tgA \cdot tgB - 1) \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$$

C.143 Demonstrar a idantidade: $4 \cdot \text{sen} (x + 60^\circ) \cdot \cos (x + 30^\circ) = 3 \cdot \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

C.144 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a)
$$f(x) = sen 2x \cdot cos x + sen x \cdot cos 2x$$

b)
$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x$$

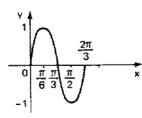
c)
$$h(x) = \frac{1 + tg x}{1 - tg x}$$

Solução

a)
$$f(x) = sen (2x + x) = sen 3x$$

então

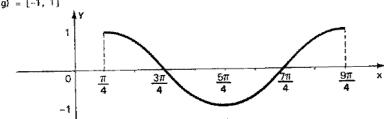
$$p = \frac{2\pi}{3}$$



b)
$$g(x) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos (x - \frac{\pi}{4})$$

então

$$D(g) = \mathbb{R}$$



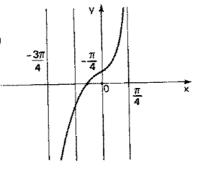
c)
$$h(x) = \frac{tg \frac{\pi}{4} + tg x}{1 - tg \frac{\pi}{4} \cdot tg x} = tg (x + \frac{\pi}{4})$$

então

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$p = \pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \implies tg(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = tg \ 0 = 0$$



C.145 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a)
$$f(x) = cos^2 2x - sen^2 2x$$

b)
$$g(x) = \sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x$$

c)
$$h(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

C.146 Qual é o período da função f: R → R dada por

$$f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3x + \cos x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 3x + \cos x \cdot \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 2x$$

II. FÓRMULAS DE MULTIPLICAÇÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de 2a, 3a, 4a, etc, conhecidas as funções circulares de a.

74. Funções circulares de 2a

Façamos 2a = a + a e apliquemos as fórmulas de adição:

1)
$$\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

então

então

III) tg 2a = tg (a + a) =
$$\frac{\text{tg a} + \text{tg a}}{1 - \text{tg a} + \text{tg a}}$$

então

75. Funções circulares de 3a

Fazendo 3a = 2a + a e aplicando as fórmulas de adição, temos:

1)
$$\cos 3a = \cos (2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a =$$

= $(2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - (2 \cdot \sin a \cdot \cos a) \sin a =$
= $(2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \sin^2 a \cdot \cos a =$
= $(2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \cdot (1 - \cos^2 a) \cos a$

então

41)
$$sen 3a = sen (2a + a) = sen 2a \cdot cos a + sen a \cdot cos 2a =$$

= $(2 \cdot sen a \cdot cos a) \cdot cos a + sen a (1 - 2 \cdot sen^2 a) =$
= $2 \cdot sen a \cdot (1 - sen^2 a) + sen a \cdot (1 - 2 sen^2 a)$

então

sen
$$3a = 3 \cdot sen a - 4 \cdot sen^3 a$$

III)
$$tg \ 3a = tg \ (2a + a) = \frac{tg \ 2a + tg \ a}{1 - tg \ 2a \cdot tg \ a} = \frac{\frac{2 tg \ a}{1 - tg^2 \ a} + tg \ a}{1 - \frac{2 tg \ a}{1 - tg^2 \ a} \cdot tg \ a} = \frac{\frac{2 tg \ a}{1 - tg^2 \ a} + tg \ a}{(1 - tg^2 \ a) - 2 \cdot tg \ a \cdot tg \ a}$$

então

$$tg \ 3a = \frac{3 \cdot tg \ a - tg^3 \ a}{1 - 3 \cdot tg^2 \ a}$$

EXERCÍCIOS

C.147 Sendo tg x = $\frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular sen 2x.

olucão

$$\sin x = -\sqrt{\frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}} = -\sqrt{\frac{\frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 x}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{4}{5}$$

$$\sec 2x = 2 \cdot \sec x \cdot \cos x = 2 \cdot (-\frac{3}{5}) \cdot (-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$$

C.148 (FEI-77) Calcular sen 2x sabendo-se que: tg x + cotg x = 3.

C.149 Sendo cotg x = $\frac{12}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular cos 2x.

Solução

cossec x =
$$\sqrt{1 + \cot^2 x} = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = \frac{13}{5} \implies \sec x = \frac{5}{13}$$

cos 2x = 1 - 2 · sen² x = 1 - 2 · $\frac{25}{169} = \frac{119}{169}$

C.150 (MAUÁ-77) Sendo: sen $\alpha = \frac{2}{3}$ com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

- a) calcule sen $(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)$
 - b) calcule $\cos(\frac{\pi}{A} + \alpha)$

C.151 Sendo $\sec x = \frac{25}{24}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular tg 2x.

Solucão

$$tg \times = -\sqrt{\sec^2 x - 1} = -\sqrt{\frac{625}{576} - 1} = -\frac{7}{24}$$

$$tg 2x = \frac{2 \cdot tg \times}{1 - tg^2 \times} = \frac{-\frac{14}{24}}{1 - \frac{49}{576}} = -\frac{336}{527}$$

C/152 Se $\cos x = \frac{3}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular sen 3x.

C463 Se sen x = $\frac{12}{13}$ e $\frac{\pi}{2}$ < x < π , calcular cos 3x.

C.154 Se $\sec x = \frac{4}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular tg 3x.

C.155 (MAPOFE i-75) Calcular sen² $\frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} + \text{tg } \frac{\pi}{3} + \text{tg } \frac{14\pi}{3}$.

C.156 Prover que:

a)
$$sen 4a = 4 \cdot sen a \cdot cos^3 a - 4 \cdot sen^3 a \cdot cos a$$

b)
$$\cos 4a = 8 \cdot \cos^4 a - 8 \cdot \cos^2 a + 1$$

c)
$$tg 4a = \frac{4 \cdot tg a - 4 \cdot tg^3 a}{tg^4 a - 6 \cdot tg^2 a + 1}$$

C.157 Demonstrar pelo princípio de indução finita que:

$$\frac{1}{\cos a + \cos 2a + \cos 4a + \dots + \cos 2^{n-1} + a = \frac{\sin 2^n a}{2^n + \sin a}$$

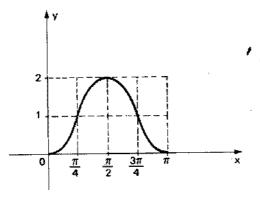
C.158 (POLI-61) Esboçar o gráfico da função y = 2 · sen² x utilizando o gráfico de cos 2x.

Solução

A partir da identidade cos 2x = 1 - 2 · sen² x, temos:

$$y = 2 + sen^2 x = y = 1 - cos 2x$$

×	2×	cos 2x	γ
0	0	1	0
<u>π</u>	<u>π</u> 2	0	1
$\frac{\pi}{2}$	п	1	2
37ī 4	<u>Зл</u> 2	0	1
П	2π	1	0



C.159 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a)
$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$$

b)
$$g(x) = 8 \cdot sen^2 x \cdot cos^2 x$$

c)
$$h(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$$

C.160 Qual é o período das seguintes funções reais?

a)
$$f(x) = sen x + cos x$$

b)
$$g(x) = \frac{1 - tg^2 2x}{1 + tg^2 2x}$$

c)
$$h(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$$

III. FORMULAS DE DIVISÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de $\frac{x}{2}$, conhecida uma das funções circulares de x.

76. É dado o cos x

Sabemos que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ e $\cos 2a = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$, portanto, fazendo 2a = x, teremos:

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$
 \Longrightarrow $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

$$\cos x = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \implies \boxed{\frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \qquad \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}$$

Os sinais (\pm) só têm sentido quando se conhece cos x, sem conhecer x. Assim, sabendo que cos x = cos x₀, temos:

1. solução:
$$x = x_0 + 2k\pi \implies \frac{x}{2} = \frac{x_0}{2} + k\pi$$
 (1)

2° solução:
$$x = -x_0 + 2k\pi \implies \frac{x}{2} = -\frac{x_0}{2} + k\pi$$
 (11)

As expressões (I) e (II) nos indicam que, dado $\cos x$, existem 4 possíveis arcos $\frac{x}{2}$, pois k pode assumir valores pares ou impares, os quais dão origem a dois valores para $\cos \frac{x}{2}$, sen $\frac{x}{2}$ e tg $\frac{x}{2}$. Provemos que existem dois valores simétricos para $\cos \frac{x}{2}$, por exemplo:

Expr. (1) k par:
$$\cos \frac{x}{2} = \cos (\frac{x_0}{2} + 2k_1\pi) = \cos \frac{x_0}{2}$$

Expr. (1) k impar:
$$\cos \frac{x}{2} = \cos \left[\frac{x_0}{2} + (2k_1 + 1)\pi \right] = \cos \left(\frac{x_0}{2} + \pi \right) = -\cos \frac{x_0}{2}$$

Expr. (II) k par:
$$\cos \frac{x}{2} = \cos \left(-\frac{x_0}{2} + 2k_1\pi\right) = \cos \left(-\frac{x_0}{2}\right) = \cos \frac{x_0}{2}$$

Expr. (11) k impar:
$$\cos \frac{x}{2} = \cos \left[-\frac{x_0}{2} + (2k_1 + 1)\pi \right] = \cos \left(-\frac{x_0}{2} + \pi \right) =$$

$$= -\cos \frac{x_0}{2}$$

77. É dado o sen x

Sabemos que $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$, portanto, tendo sen x, calculamos $\cos x$ e entramos com as fórmulas do parágrafo anterior.

EXERCÍCIOS

C.161 Calcular as funções circulares de $\frac{\pi}{8}$

$$sen \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$tg \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - 1}$$

C.162 Se sen x = $\frac{24}{25}$ e $\frac{\pi}{2}$ < x < π , calcular as funções circulares de $\frac{x}{2}$

Solução

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = -\frac{7}{25}$$

 $\sin \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$$\cos \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = +\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$
Observemos que $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

C.163 Se tg x = $\frac{5}{12}$, calcular sen $\frac{x}{2}$.

Solução

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 x}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{25}{144}}} = \pm \frac{12}{13}$$

sen
$$\frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{13 + 12}{26}}$$

então há 4 possibilidades para sen 🗓

$$+\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}, +\frac{5}{\sqrt{26}}$$
 ou $-\frac{5}{\sqrt{26}}$

C.164 (FAUUSP-69) Sabendo-se que x é um arco do primeiro quadrante e $\cos x = \frac{1}{3}$ determinar sen $\frac{x}{2}$ e tg $\frac{x}{2}$.

C.165 Sabendo que $\cos x = \frac{24}{25}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular sen $\frac{x}{4}$, $\cos \frac{x}{4}$ e tg $\frac{x}{4}$.

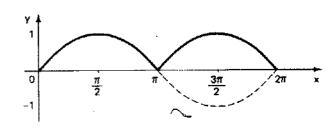
C.166 Sando sec x = 4 e
$$\frac{3\pi}{2}$$
 < x < 2π , calcular tg ($\frac{\pi + x}{2}$).

C.167 Estuder a variação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dade por $f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$

Solução

De $\cos 2x = 1 - 2 \sec^2 x$ decorre que $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sec^2 x$, portanto, $f(x) = \sqrt{\sec^2 x} = |\sec x|$

já vimos que: D(f) = R p = π Im(f) = [0; 1]



C.168 Estudar a variação da função $f: \mathbb{R} - \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (1 - \cos 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \cos 2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

C.169 Qual é o período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + \cos 4x)^{\frac{1}{2}}$?

C.170 a) Para todo real $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), provar que $\frac{1}{\sec \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha$.

b) Demonstrar, utilizando o resultado anterior, que

$$\frac{1}{\text{sen a}} + \frac{1}{\text{sen 2a}} + \frac{1}{\text{sen 4a}} + \dots + \frac{1}{\text{sen 2n_a}} = \cot g \frac{a}{2} - \cot g 2^{n_a}$$

IV. TANGENTE DO ARCO METADE

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de x, conhecida a tg $\frac{x}{2}$.

Das fórmulas de multiplicação, temos:

$$sen 2a = 2 \cdot sen a \cdot cos a = 2 \cdot sen a \cdot \frac{cos^2 a}{cos a} = 2 \cdot \frac{sen a}{cos a} \cdot \frac{1}{sec^2 a} =$$

$$= \frac{2 \cdot tg a}{1 + tg^2 a}$$

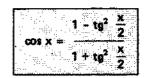
$$tg 2a = \frac{2 \cdot tg a}{1 - tg^2 a}$$

Fazendo $2a = x e a = \frac{x}{2}$, temos:

$$sen x = \frac{2 \cdot tg \frac{x}{2}}{1 \sqrt{tg^2 \frac{x}{2}}}$$

 $tg x = \frac{2 \cdot tg \frac{x}{2}}{1 - tg^2 \frac{x}{2}}$

Notando que $\cos x = \frac{\sin x}{tg x}$, temos:



A utilidade destas três últimas fórmulas é permitir a substituição de sen x, $\cos x$ e tg x por uma ûnica função (tg $\frac{x}{2}$), atravês de expressões racionais. Esse tipo de substituição é frequentemente utilizado na resolução de equações trigonomètricas.

V. TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

78. Em Álgebra Elementar, têm grande importância prática os recursos para transformar um polinômio em produto de outros polinômios (fatoração). Assim, por exemplo, temos:

Muitas vezes aplicaremos esses recursos à Trigonometria, recorrendo a transformações como:

$$sen^2 x - 2 \cdot sen x = sen x \quad (sen x - 2)$$

$$sen^2 x - cos^2 x = (sen x + cos x)(sen x - cos x)$$

Além dos recursos algébricos, a Trigonometria dispõe de fórmulas que permitem completar uma fatoração. Assim, no exemplo acima, podemos fatorar:

Vamos deduzir agora es fórmulas pare transformar somas e diferenças trigonométricas em produtos.

79. Sabemos que:

$$cos (a + b) = cos a \cdot cos b - sen a \cdot sen b$$

$$cos (a - b) = cos a \cdot cos b + sen a \cdot sen b$$

$$sen (a + b) = sen a \cdot cos b + sen b \cdot cos a$$

$$sen (a - b) = sen a \cdot cos b - sen b \cdot cos a$$

Logo:

1 + 2:
$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$$

1 - 2: $\cos (a + b) - \cos (a - b) = -2 \cdot \sin a \cdot \sin b$
3 + 4: $\sin (a + b) + \sin (a - b) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos b$

Estas relações são denominadas fórmulas de Werner.

80. Fazendo nas fórmulas de Werner:

$$\begin{cases} a+b=p\\ a-b=q \end{cases} \text{ portanto, } a=\frac{p+q}{2} \text{ e } b=\frac{p-q}{2}$$

obtemos as fórmulas de transformação em produto:

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

81. Temos ainda que:

$$tg p + tg q = \frac{sen p}{cos p} + \frac{sen q}{cos q} = \frac{sen p \cdot cos q + sen q \cdot cos p}{cos p \cdot cos q}$$

$$tg p + tg q = \frac{sen (p + q)}{cos p \cdot cos q}$$

$$tg p - tg q = \frac{sen p}{cos p} - \frac{sen q}{cos q} = \frac{sen p \cdot cos q - sen q \cdot cos p}{cos p \cdot cos q}$$

$$\Rightarrow tg p - tg q = \frac{sen (p - q)}{cos p \cdot cos q}$$

EXERÇICIOS

C.171 Transformar em produto:

a)
$$y = sen 5x + sen 3x$$

b)
$$y = \cos 3x + \cos x$$

Solução

a)
$$y = 2 \cdot \text{sen } \frac{5x + 3x}{2} \cdot \cos \frac{5x - 3x}{2} = 2 \cdot \text{sen } 4x \cdot \cos x$$

b)
$$y = 2 \cdot \cos \frac{3x + x}{2} \cdot \cos \frac{3x - x}{2} = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x$$

C.172 Transformar em produto:

b)
$$y = 1 + \cos x$$

c)
$$y = 1 + \cos a + \cos 2a$$

Solução

a)
$$y = \sin \frac{\pi}{2} + \sin 2x = 2 \cdot \sin (\frac{\pi}{4} + x) \cdot \cos (\frac{\pi}{4} - x) =$$

= $2 \cdot \sin^2 (\frac{\pi}{4} + x)$

b)
$$y = \cos 0 + \cos x = 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos (-\frac{x}{2}) = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

c)
$$y = (\cos 2a + \cos 0) + \cos a = 2 \cdot \cos^2 a + \cos a =$$

= $2 \cdot \cos a (\cos a + \frac{1}{2}) = 2 \cdot \cos a [\cos a + \cos \frac{\pi}{3}] =$
= $4 \cdot \cos a \cdot \cos (\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6}) \cdot \cos (\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6})$

C.173 Transformar em produto:

d)
$$y = sen^2 5x - sen^2 x$$

e)
$$y = \frac{\text{sen a} + \text{sen b}}{\text{con a} + \text{sen b}}$$

c)
$$v = \cos^2 3x - \cos^2 x$$

Solução

a)
$$y = \sin x + \cos x = \sin x + \sin (\frac{\pi}{2} - x) =$$

= 2 · sen $\frac{\pi}{4}$ · cos $(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ · cos $(x - \frac{\pi}{4})$

b)
$$y = \cos 2x - \cos (\frac{\pi}{2} - 2x) =$$

= $-2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin (2x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \cdot \sin (2x - \frac{\pi}{4})$

e)
$$y = \frac{2 \cdot \text{sen } \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}} = \text{tg } \frac{a+b}{2}$$

C.174. Transformar em produto:

c)
$$y = sen a + sen (a + r) + sen (a + 2r) + sen (a + 3r)$$

d)
$$y = \cos(a + 3b) + \cos(a + 2b) + \cos(a + b) + \cos a$$

f)
$$y = sen^2 p - sen^2 q$$

q)
$$y = \cos^2 p - \sin^2 q$$

C.175 (MAPOFEI-76) Transformar o produto cos 2x · cos 4x em uma soma equivalente.

C.176 (FEFAAP-77) Provar que (sen A + cos A)⁴ =
$$4 \cos^4 (A - \frac{\pi}{4})$$
.

C,177 Calcular o valor numérico da expressão:
$$y = sen \frac{13\pi}{12} \cdot cos \frac{11\pi}{12}$$

Solucão

Fazendo
$$\frac{p+q}{2} = \frac{13\pi}{12}$$
 e $\frac{p-q}{2} = \frac{11\pi}{12}$, obtemos

$$p = \frac{24\pi}{12} = 2\pi + q = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$
, portanto:

$$y = \frac{1}{2} (2 \cdot \text{sen } \frac{13\pi}{12} \cdot \text{cos } \frac{11\pi}{12}) = \frac{1}{2} (\text{sen } 2\pi + \text{sen } \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} (0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

C.178 Calcular o valor numérico das expressões:

a)
$$y = \cos \frac{7\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$$

b) y = sen
$$\frac{13\pi}{12}$$
 • sen $\frac{7\pi}{12}$

c)
$$y = sen \frac{5\pi}{24} \cdot cos \frac{\pi}{24}$$

C.179 Provar que
$$\cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ} \cdot \cos 160^{\circ} = -\frac{1}{8}$$

Solução

$$\cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ} \cdot \cos 160^{\circ} = \frac{2 \cdot \cos 80^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ}}{2} \cdot \cos 160^{\circ} = \frac{(\cos 120^{\circ} + \cos 40^{\circ}) \cdot \cos 160^{\circ}}{2} = \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot \cos 160^{\circ} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 160^{\circ}}{2} = \frac{(-\cos 160^{\circ} + \cos 200^{\circ} + \cos 120^{\circ})}{2} = \frac{\cos 120^{\circ}}{4} = \frac{1}{2}$$

C.180 Provar que $tg 81^{\circ} - tg 63^{\circ} - tg 27^{\circ} + tg 9^{\circ} = 4$.

C.181 Demonstrar que, se A, B e C são ângulos internos de um triângulo, vale a relação:

a)
$$sen A + sen B + sen C = 4 \cdot cos \frac{A}{2} \cdot cos \frac{B}{2} \cdot cos \frac{C}{2}$$

b)
$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

d)
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

Preliminares:

1)
$$A + B + C = \pi$$
 \Longrightarrow $(B + C) = \pi - A$ \Longrightarrow $\begin{cases} sen (B + C) = sen A \\ cos (B + C) = -cos A \end{cases}$

II) A + B + C =
$$\pi$$
 \Longrightarrow $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ \Longrightarrow
$$\begin{cases} sen & \frac{B+C}{2} = cos & \frac{A}{2} \\ cos & \frac{B+C}{2} = sen & \frac{A}{2} \end{cases}$$

Solução

a) 10 membro = sen A + sen B + sen C =
$$= sen A + 2 \cdot sen \frac{B+C}{2} \cdot cos \frac{B-C}{2} =$$

$$= 2 \cdot sen \frac{A}{2} \cdot cos \frac{A}{2} + 2 \cdot cos \frac{A}{2} \cdot cos \frac{B-C}{2} =$$

$$= 2 \cdot cos \frac{A}{2} \cdot \left[sen \frac{A}{2} + cos \frac{B-C}{2} \right] =$$

$$= 2 \cdot cos \frac{A}{2} \cdot \left[cos \frac{B+C}{2} + cos \frac{B-C}{2} \right] =$$

$$= 2 \cdot cos \frac{A}{2} \cdot \left[2 \cdot cos \frac{B}{2} \cdot cos \frac{C}{2} \right] =$$

$$= 4 \cdot cos \frac{A}{2} \cdot cos \frac{B}{2} \cdot cos \frac{C}{2} = 20 \text{ membro}$$

b) 1? membro =
$$\cos A + \cos B + \cos C =$$
= $\cos A + 2 \cdot \cos \frac{B + C}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$
= $(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}) + 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$
= $1 - 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \left[\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B - C}{2} \right] =$
= $1 - 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B + C}{2} - \cos \frac{B - C}{2} \right] =$
= $1 - 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \left[-2 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right] =$
= $1 + 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = 2^0$ membro

d) Sabernos que
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

10 membro = $\cos^2 A + \frac{\cos 2B + 1}{2} + \frac{\cos 2C + 1}{2}$
= $1 + \cos^2 A + \frac{\cos 2B + \cos 2C}{2} = \frac{1 + \cos^2 A + \cos (B + C) \cdot \cos (B - C)}{2} = \frac{1 + \cos^2 A - \cos A \cdot \cos (B - C)}{2} = \frac{1 - \cos A \left[\cos (B - C) - \cos A\right]}{2} = \frac{1 - \cos A \left[\cos (B + C) + \cos (B - C)\right]}{2} = \frac{1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}{2} = \frac{2^2 \text{ membro}}{2}$

C.182 Demonstrar que, se A, B, C são ángulos internos de um triángulo, vale a relação:

a) sen B + sen C - sen A = 4 · sen
$$\frac{B}{2}$$
 · sen $\frac{C}{2}$ · cos $\frac{A}{2}$

b)
$$\cos 8 + \cos C - \cos A = -1 + 4 \cdot \cos \frac{8}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A}{2}$$

c)
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

d)
$$sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C = 2 \cdot (1 + cos A \cdot cos B \cdot cos C)$$

e)
$$\frac{1}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A} = 1 \quad (A, B, C \neq \frac{\pi}{2})$$

C.183 Prover que se a + b + c = $\frac{\pi}{2}$ então:

b)
$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cdot \sin a \cdot \sinh \cdot \sec c = 2$$

C.184 Provar que se (sen 2A, sen 2B, sen 2C) é uma progressão aritmética, então o mesmo ocorre com (tg (A + B), tg (C + A), tg (B + C)).

Solução

Por hipótese, temos:

C.185 Prover que se (sen (a + b - c), sen (a - b + c), sen (-a + b + c)) é uma progressão aritmética, então o mesmo ocorre com (tg a, tg b, tg c).

C.186 Provar que se
$$a + b + c = \frac{\pi}{2}$$
, então
$$\sec^2 a + \sec^2 b + \sec^2 c + 2 \cdot \sec a \cdot \sec b \cdot \sec c = 1$$

Solucão

1.9 membro =
$$sen^2 a + \frac{1 - cos 2b}{2} + \frac{1 - cos 2c}{2} + 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c =$$

$$= 1 + sen^2 a - \frac{cos 2b + cos 2c}{2} + 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c =$$

$$= 1 + sen^2 a - cos (b + c) \cdot cos (b - c) + 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c =$$

$$= 1 + sen^2 a - sen a \cdot cos (b - c) + 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c =$$

$$= 1 + sen a \cdot \left[sen a - cos (b - c) \right] + 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c =$$

$$= 1 + sen a \cdot \left[cos (b + c) - cos (b - c) \right] + 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c =$$

$$= 1 - 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c + 2 \cdot sen a \cdot sen b \cdot sen c = 1 =$$

$$= 2^0 \text{ membro}$$

C.187 Estudar a variação, da função f:IR → IR dada por f(x) = cos x - sen x.

Solução

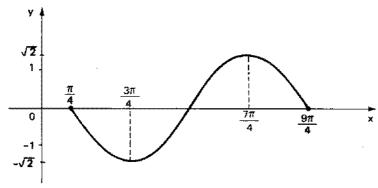
$$f(x) = \cos x - \cos (\frac{\pi}{2} - x) = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin (x - \frac{\pi}{4}) =$$

= $-\sqrt{2} \cdot \sin (x - \frac{\pi}{4})$

Portanto:

$$p = 2\pi$$

$$Im(f) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$$



C.188 Estudar a variação da função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$.

C.189 Qual é o período da função
$$f(x) = \frac{1 + tg x}{1 - tg x}$$
?

C.190 Prover que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação cos A + cos B = - sen C, antão o triângulo é retângulo.

Solucão

$$\cos A + \cos B = \sec C$$

$$\implies 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 2 \cdot \sec \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$\implies \sec \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = \sec \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \left(A-B=C \Rightarrow A=B+C=\frac{C}{2}\right)$$

$$\implies \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \implies \begin{cases} A-B=C \implies A=B+C=\frac{\pi}{2} \\ ou \\ A-B=-C \implies B=A+C=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

C.191 Provar que se os ángulos de um triángulo ABC verificam a relação sen 4A + sen 48 + sen 4C . O, entilo o triángulo é retángulo.

C.192 Demonstrar que todo triângulo cujos ângulos verificam a relação sen 3A + sen 3B + + sen 3C = 0 tem um ângulo de 60°.

Moscou: preso escreve obra

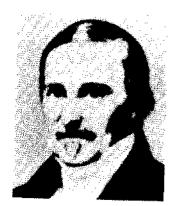
Jean Victor Poncelet nasceu em Metz, no ano de 1788.

Tendo-se destacado como estudante quando cursava a Escola Politécnica de Metz, Poncelet tornou-se conhecido como excelente professor de Matemática, sendo convidado a servir como engenheiro no exército napoleônico.

Em 1812, Poncelet lutou com as forças francesas na Rússia, caindo prisioneiro. Durante os dezoito meses de cativeiro, começou a escrever um de seus trabalhos mais notáveis: a Geometria Projetiva, teoria em que Desargues e Pascal tinham dado os primeiros passos, no século XVII.

Em 1814, Poncelet retornou à França e, a partir de 1815, começou a publicar suas criações nos "Anais da Matemática". Seus trabalhos iniciais versavam sobre os polígonos inscritos e circunscritos a uma cônica.

O grande trabalho de Poncelet, "Ensaio sobre as projetivas das seções cônicas", só apareceu em 1820 e foi melhorado e reproduzido dois anos depois com o título "Tratado das propriedades projetivas das figuras". Nestas obras, Poncelet observou que certas propriedades das figuras se mantém constantes, quando as figuras sofrem deformações por projeções.



Jean V. Poncelet (1788 - 1867)

Poncelet foi ainda o criador da teoria da polaridade e do princípio da dualidade, base sobre a qual outros matemáticos como De Morgan, Whitehead e Russel desenvolveram posteriormente seus trabalhos.

Finalmente, Poncelet atingiu o máximo de sua críação quando estabeleceu o conceito de razão dupla ou anarmônica. Com base nesta descoberta, posteriormente, Klein conseguiu unificar as geometrias numa só, criando a pangeometria.

Poncelet faleceu em 1867 na mesma cidade onde nascera, CAPÎTULO VII

EQUAÇÕES

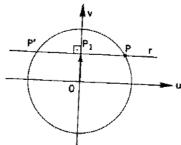
I. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

- 82. Sejam f(x) e g(x) duas funções trigonométricas da variável x e sejam D_1 e D_2 os seus respectivos domínios. Resolver a equação trigonométrica f(x) = g(x) significa determinar o conjunto S, denominado conjunto-solução ou conjunto-verdade, dos números r para os quais f(r) = g(r) é uma sentença verdadeira. Observemos que uma condição necessária para que um certo r seja uma solução da equação dada é que $r \in D_1$ e $r \in D_2$.
- 83. Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:
 - 1ª) sen $\alpha = \operatorname{sen} \beta$
 - 2ª) $\cos \alpha = \cos \beta$
 - 3^{a}) $tg \alpha = tg \beta$

denominadas, por esse motivo, equações fundamentais. Assim, antes de mais nada, é necessário saber resolver as equações fundamentais para poder resolver qualquer outra equação trigonométrica.

II. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO sen $\alpha = \text{sen } \beta$

84. Se sen $\alpha = \text{sen } \beta = \overline{OP}_1$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1 , isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

- 1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos* ou
- 2^{a}) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é são suplementares.

85. Em resumo, temos:

$$sen \alpha = sen \beta \longrightarrow \begin{cases}
\alpha = \beta + 2k\pi \\
ou \\
\alpha = \pi - \beta + 2k\pi
\end{cases}$$

EXERCÍCIOS

C.193 Resolver as seguintes equações:

a) sen x = sen
$$\frac{\pi}{5}$$

.b) cossec
$$x = cossec$$
 $\frac{2\pi}{3}$

d) sen
$$x = \frac{1}{2}$$

et sen
$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

f) sen x =
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

h) sen
$$x = -1$$

Solucão

a)
$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$$
 \Longrightarrow
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \right\}$$

b) cossec x = cossec
$$\frac{2\pi}{3}$$
 $\frac{1}{\text{sen x}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{3}}$

$$\implies \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \implies \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \operatorname{ou} \\ x = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$/ S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\} \operatorname{ou} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

c)
$$\operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ \operatorname{ou} \\ x = \pi - 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \left(2k + 1\right) \cdot \pi \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \right\}$$

d)
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

e)
$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

f) sen
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 = sen $\frac{\pi}{3}$
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

g)
$$\operatorname{sen} x = 1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$
, então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

h) sen x = -1 = sen
$$\frac{3\pi}{2}$$
, então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

C.194 Resolver as equações abaixo:

$$a = 3 + \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

c)
$$2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0$$

b)
$$sen^2 x - sen x = 0$$

d)
$$2 \cdot \cos^2 x = 1 - \sin x$$

Solução

a) sen
$$x = \pm \frac{1}{2}$$
 então:

$$S = \{x \in |R| \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \}$$

b)
$$\operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x - 1) = 0$$
 \Longrightarrow $\operatorname{sen} x = 0$ ou 1 então:
 $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

c)
$$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \implies \sin x = 1 \text{ ou } \frac{1}{2} \text{ . então};$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

d)
$$2 \cdot (1 - \sin^2 x) = 1 - \sin x$$
 \longrightarrow $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
resolvendo: $\sin x = \frac{1 + \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 + 3}{4} = 1$ ou $\frac{-1}{2}$
recalmos em equações fundamentais

sen
$$x = 1$$
 $\implies x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
sen $x = -\frac{1}{2}$ $\implies x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\} \ (k \in \mathbb{Z})$

C.195 Resolver as equações abaixo:

a)
$$sen x = sen \frac{\pi}{7}$$
b) $cossec x = \frac{\pi}{2}$
c) $sen x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $sen^2 x = 1$
e) $sen x - cossec x = 1$
i) $sen x + cos 2x = 1$

C.199 (FEFAAP-77) Determinar os valores de x que satisfazem à equação:

C.197 (FEI-76) Resolva a equação:

6.198 Resolver as seguintes equações:

$$sen 2x = \frac{1}{2}$$

$$c) sen (x - $\frac{\pi}{3}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) sen 3x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$c) sen 2x = sen x$$$$

Solucão

a)
$$\sec 2x = \frac{1}{2} = \sec \frac{\pi}{6}$$
 \Longrightarrow $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \}$

b)
$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$
 \Longrightarrow
$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$
 $5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \}$

c)
$$sen (x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = sen \frac{\pi}{3} \implies \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \}$$

d) sen
$$2x = \operatorname{sen} x$$
 \Longrightarrow
$$\begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

C.199 Determinar x ∈ IR tal que:

C.200 Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que estão em progressado aritmética e que o seno da soma do menor ângulo com o ângulo médio é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

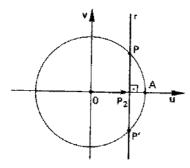
C.201 (MAPOFEI-76) Resolver o sistema
$$\begin{cases} sen (x + y) = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$$

III. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\cos \alpha = \cos \beta$

86. Se $\cos \alpha = \cos \beta = \overline{OP}_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2 , isto é, estão em P ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

- 1^a) α e β têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos*
- 2ª) α e β têm imagens símétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são replementares.



87. Em resumo, temos:

$$\cos \alpha = \cos \beta \implies \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

EXERCICIOS

C.202 Resolver as seguintes equações:

a)
$$\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$$

c) $\cos x = 0$

$$\int b1 \sec x = \sec \frac{2\pi}{3}$$

g)
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f)
$$\cos x = \frac{1}{2}$$

h)
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solução

a)
$$\cos x = \cos \frac{\pi}{5} \implies x = \pm \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

 $S = \{x \in |R| \mid x = \pm \frac{\pi}{5} + 2k\pi\}$

b)
$$\sec x = \sec \frac{2\pi}{3} \longrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} \longrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$
 então
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

c)
$$\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$
 então

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

d)
$$\cos x = 1 = \cos 0$$
 então
 $S = \{x \in |R| \mid x = 2k\pi\}$

e)
$$\cos x = -1 = \cos \pi$$
 então

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \right\}$$

f)
$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$
 então

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

g)
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$
 então

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$$

h)
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$$
 então
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.203 Resolver as equações abaixo:

a)
$$4 \cdot \cos^2 x = 3$$

b)
$$\cos^2 x + \cos x = 0$$

c)
$$sen^2 x = 1 + cos x$$

d)
$$\cos 2x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0$$

Solução

a)
$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \implies \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ então $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

b)
$$\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0 \implies \cos x = 0$$
 ou $\cos x = -1$ então
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \right\}$$

c)
$$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x$$
 $\implies \cos^2 x + \cos x = 0$ e recalmos no anterior.

d)
$$(2 \cdot \cos^2 x - 1) + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \implies 2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \implies \cos x = -1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$
então $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

C.204 Resolver as equações abaixo:

a)
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

b)
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c)
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d)
$$\sec x = 2$$

e)
$$2 \cdot \cos^2 x = \cos x$$

f)
$$4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sec x = 8$$

g)
$$2-2 \cdot \cos x = \sin x \cdot tg x$$

h)
$$2 \cdot \sin^2 x + 6 \cdot \cos x = 5 + \cos 2x$$

i)
$$1 + 3 \cdot tg^2 \times = 5 \cdot sec \times$$

j)
$$(4 - \frac{3}{\sin^2 x}) \cdot (4 - \frac{1}{\cos^2 x}) = 0$$

C.205 Resolver as sequintes equações:

a)
$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)
$$\cos 2x = \cos x$$

c)
$$\cos (x + \frac{\pi}{6}) = 0$$
 d) $\cos (x - \frac{\pi}{4}) = 1$

d)
$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

a)
$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \implies 2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
, então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{42} + k\pi \right\}$$

b)
$$\cos 2x = \cos x$$
 \Longrightarrow
$$\begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} & \text{então:} \\ 2x = -x + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in |R| \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

c)
$$\cos (x + \frac{\pi}{6}) = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \implies x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
, então:
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{2} + 2k\pi\}$

d)
$$\cos (x - \frac{\pi}{4}) = 1 = \cos 0 \implies x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$$
, então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

C.206 Resolver as seguintes equações:

a)
$$\cos 3x - \cos x = 0$$

b)
$$\cos 5x = \cos (x + \frac{\pi}{3})$$

C.207 Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que

$$\cos (A + B) = \frac{1}{2} = \sin (B + C) = \frac{1}{2}$$

C.208 (MAUÁ-77) Dada a equação (sen x + cos y) (sec x + cossec y) = 4

IV. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $tq \alpha = tq \beta$

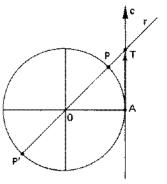
88. Se tq $\alpha = tq \beta = \overline{OT}$, então as imagens de α e β estão sobre a retair determinada por O e T, isto é, estão em Pou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

1^a) α e β têm a mesma imagem. isto é, são côngruos

លប

2^a) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são explementares.



Em resumo, temos:

$$tg \alpha = tg \beta \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \Longrightarrow \alpha = \beta + k\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

C.209 Resolver as equações seguintes:

a)
$$tg x = 1$$

c) $tg x = -\sqrt{3}$

b) cotg x =
$$\sqrt{3}$$

d)
$$tg x = 0$$

e) tg
$$2x = \sqrt{3}$$

f)
$$tg 2x = tg x$$

Solucão

a)
$$tg \times = 1 = tg \frac{\pi}{4}$$
, então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

b)
$$\cot g = \sqrt{3} \implies tg = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg = \frac{\pi}{6}$$
, então:
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$$

c)
$$tg \times = -\sqrt{3} = tg + \frac{2\pi}{3}$$
, então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi\}$$

d)
$$tg \times = 0 = tg \cdot 0$$
, então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

e)
$$tg 2x = \sqrt{3} = tg \frac{\pi}{3} \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

f)
$$tg 2x = tg x \Longrightarrow 2x = x + k\pi$$
,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

g) tg 3x = 1 = tg
$$\frac{\pi}{4} \implies 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
,

$$S = \{x \in R \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \}$$

h)
$$tg 5x = tg 3x \Longrightarrow 5x = 3x + k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Notemos que se k for (mpar, então não existem to 5x e to 3x, portanto:

$$S = \{x \in |R| | x = \frac{k\pi}{2}, k \text{ par}\}$$

C.210 Resolver as equações abaixo:

a) sen
$$x = \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$$

b)
$$sen^2 x = cos^2 x$$

c)
$$tg x + cotg x = 2$$

d)
$$\sec^2 x = 1 + tg x$$

Solução

a)
$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cdot \cos x \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{3} \Longrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

b)
$$\sin^2 x = \cos^2 x \implies \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 \implies tg^2 x = 1$$
,

..
$$S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \}$$

c)
$$tg \times + \frac{1}{tg \times} = 2 \Longrightarrow tg^2 x - 2 \cdot tg \times + 1 = 0$$

 $tg \times = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$, então:

$$S = \left\{ x \in |R| \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

d)
$$\sec^2 x = 1 + tg x \Longrightarrow 1 + tg^2 x = 1 + tg x \Longrightarrow tg^2 x - tg x = 0 \Longrightarrow tg x \cdot (tg x - 1) = 0$$
,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

C.211 Resolver as equações abaixo:

$$a \neq tg \times = tg = \frac{\pi}{5}$$

(f)
$$tg 3x - tg 2x = 0$$

)
$$tg 2x = tg(x + \frac{\pi}{4})$$

d)
$$cotg x = 0$$

$$\iint \cot g \, 2x = \cot g \, \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

C,212 Resolver as equações abaixo:

b)
$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 - \frac{\cos x}{\sin x}$$

c)
$$sen 2x \cdot cos(x + \frac{\pi}{4}) = cos 2x \cdot sen (x + \frac{\pi}{4})$$

d)
$$\{1 - tg x\}(1 + sen 2x) = 1 + tg x$$

C.213 (MAPOFE1-75) Resolver a equação cotg x - sen 2x = 0

C.214 (FEI-77) Para quais valores de p, a equação: tg p x = cotg p x tem $x = \frac{\pi}{2}$ para

V. SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DENTRO OE CERTO INTERVALD

90. Quando desejamos obter as soluções de uma equação pertencentes a um certo intervalo I, seguimos a seqüência de operações abaixo:

1º) resolvemos normalmente a equação, não tomando conhecimento do intervalo I até obtermos a solução geral;

2.0) obtida a solução geral, onde necessariamente aparece a variável k inteira, atribuímos a k todos os valores inteiros que acarretem $x \in I$.

O conjunto-solução será formado pelos valores de $\,x\,$ calculados com os valores escolhidos para $\,k,\,$

EXERCÍCIOS

C.215 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $2 \cdot \text{sen } x = 1$.

Solução

A solução geral da equação sen $x = \frac{1}{2}$ é

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
 ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Se queremos $0 \le x \le 2\pi$, devemos atribuir a k o valor 0, então:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

C.216 Quals são os arcos do intervalo fechado $0 \longmapsto 2\pi$ tais que o seno do seu dobro é $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Solução

Chamemos de x os arcos procurados, então:

A solução geral é o conjunto de todos os arcos que satisfazem à equação dada, ao passo que queremos só os arcos-solução do intervalo 0 — 211, então vamos atribuir valores a k:

em 1
$$\begin{cases} k = 0 \implies x = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \implies x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

em ②
$$\begin{cases} k = 0 \implies x = \frac{\pi}{3} \\ k = 1 \implies x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Observamos que qualquer outro valor atribuído a k em ① ou ② acarretería \times $\cancel{\in}$ 0 \longmapsto 2 π .

$$S = \{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \}$$

C.217 Determinar x tal que $0 < x < \pi$ e sen $3x = \frac{1}{2}$.

C.218 Quais são os arcos do intervalo fechado 0 ------ 2π tais que o seu seno é igual ao seno do seu dobro?

Solução

Chamemos de x os arcos procurados, então:

$$sen 2x = sen x \Longrightarrow
\begin{cases}
2x = x + 2k\pi \\
ou \\
2x = \pi - x + 2k\pi
\end{cases} \Longrightarrow
\begin{cases}
x = 2k\pi \\
ou \\
x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}
\end{cases} (2)$$

Em (1)
$$\begin{cases} k = 0 \implies x = 0 \\ k = 1 \implies x = 2\pi \end{cases}$$

em 2
$$\begin{cases} k = 0 \implies x = \frac{\pi}{3} \\ k = 1 \implies x = \pi \\ k = 2 \implies x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$S = \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$$

C.219 Obter as soluções da equação sen $3x = \sin 2x$ que partencem ao intervalo $[0, \pi]$.

C.220 Determinar x tal que $0 < x < 2\pi$ e $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

Solução

Temos
$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \implies$$

$$\begin{cases}
2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
\text{ou} \\
2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
x = \frac{\pi}{6} + k\pi & \text{①} \\
\text{ou} \\
x = -\frac{\pi}{6} + k\pi & \text{②}
\end{cases}$$

De 1
$$\begin{cases} k = 0 \implies x = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \implies x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$
 de 2
$$\begin{cases} k = 1 \implies x = \frac{5\pi}{6} \\ k = 2 \implies x = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

então
$$S = \{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \}$$

C.221 Obter x tai que $\cos 3x = \cos 2x$ e $0 \le x \le \pi$.

C.222 (EESCUSP-69) Achar as soluções de $4 \cdot \text{sen}^3 x - \text{sen } x = 0$ para $0 \le x \le 2\pi$

C.223 Determinar x tal que $0 \le x \le \pi$ e to 6x = to 2x

Solução

$$tg 6x = tg 2x \Longrightarrow 6x = 2x + k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

Fazendo k = 0, 1, 2, 3, e 4, obtemos respectivamente x = 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ e π . Excluindo os valores $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ para os quais não existem as tangentes de 6x e 2x, vem

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$$

C.224 (MAPOFEI-74) Calcular x no intervalo $0 \le x \le 2\pi$ tal que tg x + cotg x = 2. C.225 Sendo $0 \le x \le \pi$. resolver $\sqrt{\sin^2 x} - \sqrt{\cos^2 x} = 0$

C.226 (Itajubá-69) Resolver a equação sen x + sen y = 1 sabendo que x + y = $\frac{\pi}{3}$.

VI. EQUAÇÕES CLÁSSICAS

Apresentaremos neste item algumas equações tradicionais em Trigonometria, sugerindo métodos para fazê-las recair nas equações fundamentais.

91.
$$a \cdot sen x + b \cdot cos x = c (a, b, c \in R^*)$$

Método 1

Fazemos a mudança de variável sen x = u e cos x = v e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Tendo calculado u e v, determinamos os possíveis valores de x.

Método 2

Fazendo $\frac{b}{a} = tg \theta$, temos:

$$a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c \Longrightarrow \operatorname{sen} x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Longrightarrow \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \theta \Longrightarrow \operatorname{sen}(x + \theta) = \frac{c}{a} \cdot \cos \theta$$

e. assim, calcularnos $x + \theta$.

Método 3

Fazendo tg
$$\frac{x}{2}$$
 = t, temos sen x = $\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, então:
a · sen x + b · $\cos x = c \implies a \cdot \frac{2t}{1+t^2}$ + b · $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ = c \implies
 $\implies 2at + b - bt^2 = c + ct^2 \implies (c + b)t^2 - 2at + (c - b) = 0$

e recaímos em uma equação do 2º grau em t. Observemos que este mêtodo falha se $\pi + 2k\pi$ for solução da equação, caso em que a substituição tg $\frac{\pi}{2}$ = t não tem sentido.

C.227 Resolver a equação $\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x = 1$

Solução

Método 1

Fazendo sen x = u e cos x = v, temos:

$$\begin{cases} u + v \cdot \sqrt{3} = 1 & \text{(1)} \\ u^2 + v^2 = 1 & \text{(2)} \end{cases}$$

De 1 vem $u = 1 - v \cdot \sqrt{3}$ que, substituída em 2, acarreta:

$$(1 - v \cdot \sqrt{3})^2 + v^2 = 1 \implies 4v^2 - 2\sqrt{3} \cdot v = 0$$

então
$$\begin{cases} v = 0 \\ ou \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

portanto
$$\begin{cases} u = 1 - 0 \cdot \sqrt{3} = 1 \\ \text{ou} \\ u = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Existem, assim, duas possibilidades:

$$cos x = 0$$
, sen $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ΟU

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
, $\sin x = -\frac{1}{2} = x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Método 2

$$sen x + \sqrt{3} \cdot cos x = 1 \implies sen x + tg \frac{\pi}{3} \cdot cos x = 1 \implies$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x = 1 \Longrightarrow$$

$$sen x \cdot cos \frac{\pi}{3} + sen \frac{\pi}{3} \cdot cos x = cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \end{cases} \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \end{cases}$$

Método 3

Então

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} = 1 \text{ ou } -2 + \sqrt{3}$$

- Existem, assim, duas possibilidades:

$$t = tg \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi e x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

оu

$$t = tg \frac{x}{2} = -2 + \sqrt{3}, \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k\pi = x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

C.228 Resolver as seguintes equações:

a) sen
$$x + \cos x = -1$$

b)
$$\sqrt{3} \cdot \sin x = \cos x = -\sqrt{3}$$

C.229 Determinar x tal que $0 \le x \le 2\pi$ e sen x + cos x = 1.

Solução

Fazendo sen x = u e cos x = v, temos:

$$\begin{cases} u + v = 1 & \text{(1)} \\ u^2 + v^2 = 1 & \text{(2)} \end{cases}$$

(1) ern (2):
$$u^2 + (1 - u)^2 - 1 \implies 2u^2 - 2u = 0$$

Existem, então, duas possibilidades:

$$u=0$$
 e $v=1-u=1$ ou $u=1$ e $v=1-\upsilon=0$ portanto $S=\left\{0,\,\,\frac{\pi}{2}\,,\,2\pi\right\}$

C.230 Obter as soluções das equações abaixo, dentro do intervalo $[0, 2\pi]$:

b)
$$|\sin x| + |\cos x| = 1$$

C.231 (MACK-70) Resolva no conjunto dos números reais a equeção sen 2x = 1 - cos 2x.

C.232 Discutir a equação em x: m * sen x + cos x = m

Salucão

Fazendo sen x =
$$\frac{2t}{1+t^2}$$
 e cos x = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, temos:

$$m \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = m \Longrightarrow 2mt + 1 - t^2 = m + mt^2 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow$$
 (m + 1) • t² - 2mt + (m - 1) = 0

Esta última equação tem solução real se, e somente se, apresentar $\Delta \geqslant 0$, então:

$$\Delta = 4m^2 - 4(m + 1)(m - 1) = 4 \ge 0$$

o que ocorre para todo mi real.

C.233 Discutir, segundo m, as equações seguintes:

92.
$$\Sigma \operatorname{sen} f_i(x) = 0$$
 ou $\Sigma \operatorname{cos} f_i(x) = 0$

O método de resolução consiste em transformar a soma em produto e estudar as possibilidades de anulamento de cada fator.

EXERCICIOS

C.234 Resolver as equações:

a) sen
$$7x + sen 5x = 0$$

b)
$$\cos 6x + \cos 2x = 0$$

c) sen
$$4x - \cos x = 0$$

d)
$$\cos 3x + \sin 2x = 0$$

Solução

a) sen
$$7x + \text{sen } 5x = 0 \implies 2 \cdot \text{sen } 6x \cdot \cos x = 0$$

$$f^{\frac{3}{4}}$$
 passibilidade: sen $6x = 0 \Longrightarrow 6x = k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{6}$

2th passibilidade:
$$\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

b)
$$\cos 6x + \cos 2x = 0 \implies 2 \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x = 0$$

1. possibilidade:
$$\cos 4x = 0 \Longrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

2º possibilidade:
$$\cos 2x = 0 \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

c)
$$sen 4x - sen(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \implies 2 \cdot sen(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$$

18 possibilidade:
$$sen(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0 \implies \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

2º possibilidade:
$$\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0 \Longrightarrow \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \}$$

d)
$$\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0 \implies 2 \cdot \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$t^* \text{ possilidade:} \qquad \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0 \implies \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

2º possibilidade:
$$\cos(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \}$$

C.235 Resolver as equações:

- a) sen mx + sen nx = 0 (m, n ∈ N*)
- b) $\cos ax + \cos bx = 0$ (a, b $\in \mathbb{R}^*$)
- c) sen $2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

C.236 Resolver as seguintes equações:

- a) sen x + sen 3x + sen 4x + sen 6x = 0
- b) cos 3x + cos 7x = cos 5x

Solução

a)
$$(\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 4x) + (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x) = 0 \Longrightarrow$$

 $\Longrightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} 5x \cdot \cos x + 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 0 \Longrightarrow$
 $\Longrightarrow \cos x \cdot (\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 2x) = 0 \Longrightarrow$
 $\Longrightarrow 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} = 0$

$$t^{\theta}$$
 possibilidade: $\cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2º possibilidade: sen
$$\frac{7x}{2} = 0 \implies x = \frac{2k\pi}{7}$$

3º possibilidade:
$$\cos \frac{3x}{2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{2k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \}$$

b)
$$(\cos 7x + \cos 3x) - \cos 5x = 0 \implies 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x = 0 \implies$$

 $\implies 2 \cdot \cos 5x \cdot (\cos 2x - \frac{1}{2}) = 0 \implies$

1. possibilidade:
$$\cos 5x = 0 \implies x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$$

2. possibilidade:
$$\cos 2x = \frac{1}{2} \implies x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \}$$

C.237 Resolver as equações:

a)
$$sen 5x + sen x = 2 \cdot sen 3x$$

b)
$$\cos x + \cos(2x + a) + \cos(3x + 2a) = 0$$

c) sen
$$7x + \cos 3x = \cos 5x - \sin x$$

C.238 Determinar x tal que
$$0 \le x \le \pi$$
 e $\cos^2(x+a) + \cos^2(x-a) = 1$.

C.239 Determinar x tal que sen
$$3x + \cos 2x - \sin x = 1$$
 e $0 \le x \le \pi$.

C.240 (MAPOFE!-74) Determinar o ángulo x, medido em radianos, que satisfaz a igualdade:

$$sen(x + \frac{\pi}{4}) + sen(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

C.241 (MAUÁ-77) Dado o sistema

$$\begin{cases} sen(x + y) + sen(x - y) = 2 \\ sen x + cos y = 2 \end{cases}$$

a) mostre que o par (x_0, y_0) com $x_0 = 2\pi$ e $y_0 = \frac{\pi}{2}$ não é solução do sistema.

b) resolva o sistema, determinando todas as soluções (x, y).

C.242 (FEI-77) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} sen \ a + cos \ b = 1 \\ sen \ \frac{a+b}{2} \cdot cos \ \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 sendo, a e b, do 1º quadrante.

$$\sqrt{g_3}$$
 sen⁴ x + cos⁴ x = a (a \in R)

Para resolver esta equação basta aplicar a identidade

$$sen^4x + cos^4x \equiv 1 - \frac{sen^22x}{2}$$
 pois:

$$sen^{4}x + cos^{4}x = (sen^{2}x + cos^{2}x)^{2} - 2 \cdot sen^{2}x \cdot cos^{2}x =$$

$$= 1^{2} - 2 \cdot (\frac{sen 2x}{2})^{2} = 1 - \frac{sen^{2}2x}{2}$$

Temos então:

$$sen^4x + cos^4x = a \Longrightarrow 1 - \frac{sen^22x}{2} = a \Longrightarrow sen^22x = 2(1 - a).$$

Notemos que só existe solução se $0 \le 2(1 - a) \le 1$, isto é, se

$$\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1.$$

94
$$sen^6 x + cos^6 x = a (a \in R)$$

Resolver esta equação aplicando a identidade:

$$sen^6 x + cos^6 x = 1 - \frac{3 sen^2 2x}{4}$$
 pois:

$$sen^{6}x + cos^{6}x = (sen^{2}x + cos^{2}x)(sen^{4}x - sen^{2}x \cdot cos^{2}x + cos^{4}x) =$$

$$= (sen^{4}x + cos^{4}x) - sen^{2}x \cdot cos^{2}x = (1 - \frac{sen^{2}2x}{2}) - \frac{sen^{2}2x}{4} =$$

$$= 1 - \frac{3 \cdot sen^{2}2x}{4}$$

Temos então:

$$sen^6x + cos^6x = a \implies 1 - \frac{3 \cdot sen^22x}{4} = a \implies sen^22x = \frac{4 - 4a}{3}$$

Notemos que só existe solução se $0 \le \frac{4-4a}{3} \le 1$, isto é, se

$$\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1.$$

EXERCICIOS

C.243 Resolver a equação $sen^4x + cos^4x = \frac{3}{4}$

Solução

Decorre da teoria que:

$$sen^2 2x = 2(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$$

portanto sen
$$2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$
 e então:

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \right\}$$

C.244 Resolver a equação $sen^6x + cos^6x = \frac{7}{16}$

Solução

Decorre da teoria que:

$$sen^2 2x = \frac{4}{3} \cdot (1-a) = \frac{4}{3} \cdot (1-\frac{7}{16}) = \frac{3}{4}$$

portanto sen
$$2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 e então:

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \implies x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \}$$

C.245 Resolver as seguintes equações para $x \in [0, 2\pi]$:

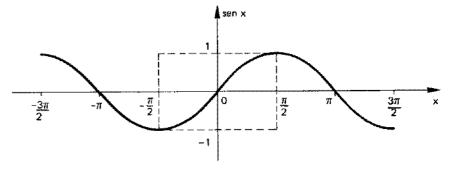
- a) $sen^4 x + cos^4 x = \frac{5}{8}$
- b) $sen^6 x + cos^6 x = \frac{5}{8}$
- c) $sen^4 x + cos^4 x = \frac{1}{2}$
- d) $sen^6 \frac{x}{2} + cos^6 \frac{x}{2} = \frac{7}{16}$
- e) $sen^3 x + cos^3 x = 1$

VII. FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS

95. Função Arco-Seno

A função seno, isto é, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$ é evidentemente não sobrejetora (pois $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = 2$) e não injetora (pois $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}$).

Se considerarmos a função seno restrita ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e com contradomínio $\left[-1, 1\right]$, isto é, g: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[-1, 1\right]$ tal que g(x) = sen x, notamos que



19) g é sobrejetora pois para todo $y \in [-1, 1]$ existe $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que sen x = y;

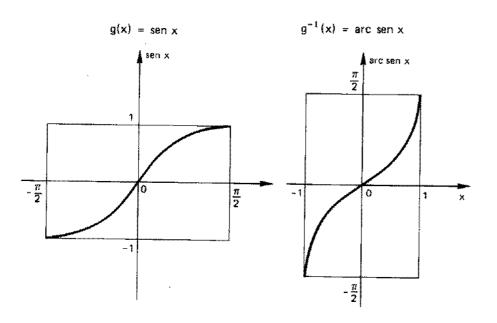
2º) g é injetora pois no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,\right]$ a função seno é crescente, então:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow sen x_1 \neq sen x_2$$

Assim sendo, a função g admite inversa e g^{-1} é denominada função arco-seno. Notemos que g^{-1} tem domínio $\left[-1,\,1\right]$, contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,\right]$ e associa a cada $\,x\in\left[-1,\,1\right]\,$ um $\,y\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,\right]\,$ tal que $\,y\,$ é um arco cujo seno é $\,x\,$ (indica-se $\,y\,$ = arc sen $\,x$). Temos, portanto, que:

$$y = \operatorname{arc\ sen\ } x \iff \operatorname{sen\ } y = x = -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Já vimos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 19 e 39 quadrantes, então a partir do gráfico de g obtemos o gráfico de g^{-1} :



EXERCICIOS

C.246 Determinar α tall que $\alpha = \text{arc sen} \frac{1}{2}$.

Solução

Temos:

$$\alpha = arc sen \frac{1}{2} \iff sen \alpha = \frac{1}{2} e - \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

isto é, arc sen $\frac{1}{2}$ não é qualquer α tal que sen $\alpha=\frac{1}{2}$ mas aquele α (único) que está no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, isto é, $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

C.247 Determinar os seguintes números: arc sen 0, arc sen $\frac{\sqrt{3}}{2}$, arc sen $(-\frac{1}{2})$, arc sen 1 e arc sen (-1).

C.248 Calcular cos(arc sen $\frac{1}{3}$).

Solução

Fazendo arc sen $\frac{1}{3}$ = α , temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3} \ e \ - \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

então

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = +\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

C.249 Calcular $tg(arc sen \frac{3}{4})$.

C.250 Calcular $\cos(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$).

Solução

Fazendo arc sen $\frac{3}{5} = \alpha$, temos :

$$\therefore \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad \operatorname{e} \quad - \quad \frac{\pi}{2} \quad \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{ent} \tilde{\operatorname{ao}} \quad \cos \alpha = + \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5} \; .$$

Fazendo arc sen $\frac{5}{13} = \beta_r$ temos:

$$sen \beta = \frac{5}{13} e - \frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$$
então $\cos \beta = + \sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$

Finalmente, temos:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{48 - 15}{65} = \frac{33}{65}$$

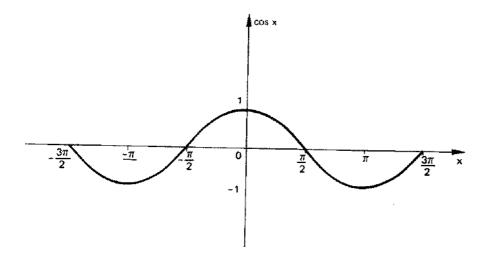
C.251 Calcular:

- a) $tg(arc sen (-\frac{2}{3}) + arc sen \frac{1}{4})$
- b) sen $(2 \cdot arc sen (-\frac{3}{5}))$
- c) $\cos (3 \cdot \arcsin \frac{12}{13})$.

96. Função arco-cosseno

A função cosseno, isto è, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ é não vobrejetora (pois $\not\equiv x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 3$) e não injetora (pois $0 \neq 2\pi$) e $\cos 0 = \cos 2\pi$).

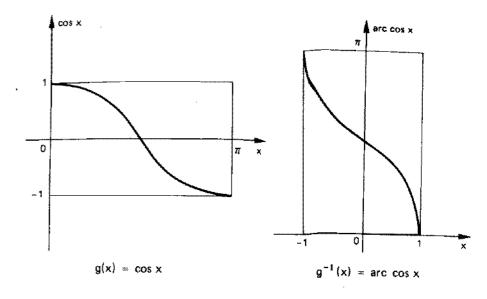
Se considerarmos a função cosseno restrita ao intervalo $[0,\,\pi]$ e com contradomínio $[-1,\,1]$, isto é, g: $[0,\,\pi] \to [-1,\,1]$ tal que $g(x) = \cos x$, notamos que:



- 19) g è sobrejetora: $\forall y \in [-1, 1], \exists x \in [0, \pi] \mid \cos x = y$:
- 20) g é injetora: \forall x₁, x₂ \in [0, π], x₁ \neq x₂ \Rightarrow cos x₁ \neq cos x₂, pois g é decrescente.

Assim, g admite inversa e g⁻¹ è denominada função arco-cosseno. Notemos que g⁻¹ tem dominio [-1, 1], contradomínio [0, π] e associa a cada $x \in [-1, 1]$ um $y \in [0, \pi]$ tal que y è um arco cujo cosseno è x (indicase y = arc cos x). Temos, portanto, que:

Como os gráficos de g e g^{-1} são simétricos em relação à reta $\gamma=x$, podemos construir o gráfico de g^{-1} a partir do de g.



EXERCICIOS

C.252 Determinar α tal que $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução

Temos

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \le \alpha \le \pi$$
 então $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

- C.253 Determinar os seguintes números: arc cos 1, arc cos $\frac{1}{2}$, arc cos $\frac{\sqrt{2}}{2}$, arc cos 0, arc cos (-1).
- **C.254** Calcular $tg(arc cos \frac{2}{5})$.

Solução

Fezendo arc cos $\frac{2}{5}$ = α , temos:

$$\cos \alpha = \frac{2}{5} e \quad 0 \le \alpha \le \pi$$

então sen
$$\alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$e \quad tg \; \alpha = \frac{sen \; \alpha}{\cos \alpha} \; = \; \frac{\sqrt{21}}{2} \; .$$

C.255 Calcular sen(arc cos $\left(-\frac{3}{5}\right)$).

C.256 Calcular cotg (are cos $\frac{2}{7}$).

C.257 (FEI-76) Sendo A do primeiro quadrante e arc sen x = A, ache arc cos x

C.258 Calcular sentarc cos $\frac{5}{13}$ + arc sen $\frac{7}{25}$).

Solução

Fazendo arc cos $\frac{5}{13} = \alpha$, temos;

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} = 0 \le \alpha \le \pi$$

então sen
$$\alpha = +\sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$$

Fazendo arc sen $\frac{7}{25} = \beta$, temos:

então
$$\cos \beta = +\sqrt{1-(\frac{7}{25})^2} = \frac{24}{25}$$

Finalmente, temos:

$$sen(\alpha + \beta) = sen \alpha \cdot cos \beta + sen \beta \cdot cos \alpha =$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{24}{25} + \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{13} = \frac{288 + 35}{325} = \frac{323}{325}$$

C.259 Calcular;

- a) sentarc cos $\frac{3}{5}$ arc cos $\frac{5}{13}$)
- b) costarc sen $\frac{7}{25}$ arc cos $\frac{12}{13}$)
- c) $tg(2 \cdot arc cos(-\frac{3}{5}))$
- d) $\cos(\frac{1}{2} \cdot \arccos \frac{7}{25})$

C.260 (MAPOFEI-72) Seja a função $f(x) = \cos(2 \arccos x), -1 \le x \le 1.$

- a) Determinar os valores de x tais que f(x) = 0
- b) Esboçar o gráfico de $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

97. Função arco-tangente

A função tangente, isto é, $f: \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f(x) = tg x é sobrejetora (pois $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ tal que tg x = y) e não injetora (pois $0 \neq \pi$ e $tg 0 = tg \pi$).

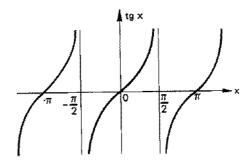
Se considerarmos a função tangente restrita ao intervalo aberto $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ e com contradomínio R, isto é,

g:]-
$$\frac{\pi}{2}$$
, $\frac{\pi}{2}$ [\rightarrow R

tal que g(x) = tg x, notamos que:

- 1º) g também é sobrejetora;
- 2º) g é injetora pois no intervalo $]-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}[$ a função tangente é crescente, então:

$$x_1, x_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, x_1 \neq x_2 \Rightarrow tg x_1 \neq tg x_2]$$



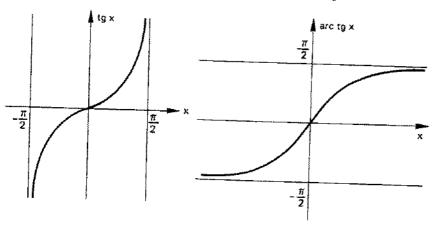
Deste modo a função g admite inversa e g^{-1} é denominada função arcotangente. Notemos que g^{-1} tem domínio R, contradomínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e associa a cada $x \in R$ um $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tal que y é um arco cuja tangente é x (indica-se y = arc tg x). Temos, portanto, que:

$$y = arc tg x \iff tg y = x e - \frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Como de hábito vamos construir o gráfico de g-1 a partir de g.

$$g(x) = tg x$$

$$g^{-1}(x) = arc tg x$$



EXERCICIOS

C.261 Determinar α tal que α = arc tg 1.

Solução

Temos:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 \iff \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad e \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$
 isto é, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

C.262 Determinar os seguintes números: arc tg 0, arc tg $\sqrt{3}$, arc tg (-1), e arc tg (- $\frac{\sqrt{3}}{3}$).

C.263 Calcular sen(arc tg $\sqrt{2}$).

Solução

Fazendo arc tg $\sqrt{2} = \alpha$, temos:

$$tg \ \alpha = \sqrt{2} \ e \ - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

então

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \Longrightarrow sen \alpha = +\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

C.264 Calcular cos(arc tg($-\frac{4}{3}$)).

C.265 Calcular totarc sen $\frac{3}{5}$ - arc to $\frac{5}{12}$).

Solução

Fazendo arc sen $\frac{3}{5} = \alpha$, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \ \mathrm{e} \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \ , \ \ \mathrm{ent} \ \widetilde{ao} :$$

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 \cdot \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} e \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Fazendo arc tg $\frac{5}{12} = \beta$, temos tg $\beta = \frac{5}{12}$

Finalmente, temos:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha - tg \beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{\frac{16}{48}}{\frac{63}{48}} = \frac{16}{63}$$

C.266 Calcular:

- a) sen(arc tg 2 + arc tg 3)
- b) $\cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2})$
- c) tg $(2 \cdot arc tg \frac{1}{5})$
- d) cos (3 · arc tg $\frac{24}{7}$)

C.267 Demonstrar a igualdade:

$$arc sen \frac{\sqrt{5}}{5} + arc cos \frac{3}{\sqrt{10}} = arc tg 1$$

Solução

Façamos
$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$$
, $\beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\gamma = \arccos tg 1$,

então

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad e \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad e \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi \Rightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = 1 \quad e \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

(II) Calculemos

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta} = \frac{\frac{sen \alpha}{cos \alpha} + \frac{sen \beta}{cos \beta}}{\frac{sen \alpha}{cos \alpha} \cdot \frac{sen \beta}{cos \beta}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{\sqrt{20}}} + \frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{5}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 = \lg \gamma$$

$$1 - \frac{\frac{5}{\sqrt{20}}}{\frac{\sqrt{20}}{5}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 = \lg \gamma$$

(III) Conclusão

$$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$tg(\alpha + \beta) = tg \gamma$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \gamma$$

C.268 Prover as seguintes igualdades:

a) (ITAJUBA-77) arc tg
$$\frac{1}{2}$$
 + arc tg $\frac{1}{3}$ = $\frac{\pi}{4}$

b) arc sen
$$\frac{1}{\sqrt{5}}$$
 + arc cos $\frac{3}{\sqrt{10}}$ = $\frac{\pi}{4}$

c) arc cos
$$\frac{3}{5}$$
 + arc cos $\frac{12}{13}$ = arc cos $\frac{16}{65}$

d) arc sen
$$\frac{24}{25}$$
 - arc sen $\frac{3}{5}$ = arc tg $\frac{3}{4}$

C.269 Provar que 2 · arc tg $\frac{1}{3}$ + arc tg $\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

Solução

Fazendo arc tg $\frac{1}{3} = \alpha$, temos:

$$tg \alpha = \frac{1}{3} \quad s \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \implies 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \implies 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$$

Fazendo arc tg $\frac{1}{7} = \beta$, ternos:

$$tg \beta = \frac{1}{7} e - \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Tendo em vista 1 e 2), para provar que $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ besta provar que $tg(2\alpha + \beta) = 1$ pois $0 < 2\alpha + \beta < \pi$. Temos:

$$tg 2\alpha = \frac{2 tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$tg(2\alpha + \beta) = \frac{tg 2\alpha + tg \beta}{1 - tg 2\alpha \cdot tg \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$$

C.270 Prover as igualdades:

a)
$$2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} + \operatorname{arc} \cos \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

b) 3 arc sen
$$\frac{1}{4}$$
 + arc cos $\frac{11}{16} = \frac{\pi}{2}$

Leonhard Euler nasceu em Basiléia, Suíça, onde seu pai era ministro religioso e possuía alguns conhecimentos matemáticos.

Euler foi aluno de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel, recebendo ampla instrução em Teologia, Medicina, Astronomia, Física, Línguas orientais e Matemática.

Com o auxílio de Bernoulli entrou para a Academia de S. Petersburgo, fundada por Catarina I, ocupando um lugar na seção de Medicina e Fisiologia, e em 1730 passando à seção de Filosofia por ocasião da morte de Nicolaus e afastamento de Daniel. Tornando-se o principal matemático já aos vinte e seis anos, dedicou-se profundamente à pesquisa compondo uma quantidade inigualável de artigos, inclusive para a revista da Academia.

Em 1735 perdeu a visão do olho direito mas suas pesquisas continuaram intensas chegando a escrever até mesmo enquanto brincava com seus filhos.

Conquistou reputação internacional e recebeu menção honrosa na Academia das Ciências de Paris bem como vários prêmios em concursos.

Convidado por Frederico, o Grande, Euler passou 25 anos na Academia de Berlim, voltando à Rússia em 1766.

Euler ocupou se de quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada sendo o maior responsável pela linguagem e notações que usamos hoje; foi o primeiro a empregar a letra e como base do sistema de logaritmos naturais, a letra π para razão entre comprimento e diâmetro da circunferência e o símbolo / para $\sqrt{-1}$. Deve-se a ele também o uso de letras minúsculas designando lados do triângulo e maiúsculas para seus ângulos opostos; simbolizou logaritmo de x por 1x, usou Σ para indicar adição e f(x) para função de x, além de outras notações em Geometria, Âlgebra, Trigonometria e Análise.

Euler reuniu Cálculo Diferencial e Métndo dos Fluxos num só ramo mais geral da Matemática que é a Análise, o estudo dos processos infinitos, surgindo assim sua principal obra, em 1748, a "Introdução à Análise Infinita", baseando-se fundamentalmente em funções, tanto algébricas como transcendentes elementares (trigonométricas, logarítmicas, trigonométricas inversas e exponenciais).

Foi o primeiro a tratar dos logaritmos como expoentes e com idéia correta sobre logaritmo de números negativos.

Muito interessado no estudo de séries infinitas, obteve notáveis resultados que o levaram a relacionar Análise com Teoria dos Números, e para a Geometria, Euler dedicou um Apêndice da "Introdução" onde dá a representação da Geometria Analítica no espaço.

Euler escreveu em todos os níveis, em várias línguas, publicando mais de 500 livros e artigos.

Os dezessete últimos anos de sua vida passou em total cegueira mas o fluxo de suas pesquisas e publicações não diminuiu, escrevendo com giz em grandes quadros negros ou ditando para seus filhos.

Manteve sua mente poderosa até os 76 anos quando morreu.

Euler foi descrito palos matemáticos da época como sendo a própria "Análise encarnada".

CAPÍTULO VIII

INEQUAÇÕES

I. INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

98. Sejam f e g duas funções trigonométricas de variável x. Resolver a inequação f(x) < g(x) significa obter o conjunto S, denominado conjunto-solução ou conjunto-verdade, dos números r para os quais f(r) < g(r) è uma sentença verdadeira.

Quase todas as inequações trigonométricas podem ser reduzidas a inequações de um dos seguintes seis tipos:

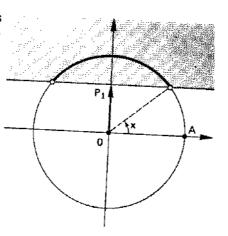
- 1^a) sen x > m
- 2^a) sen x < m
- 3^{a}) cos x > m
- 4^{a}) cos x \leq m
- 5a) tg x > m
- 6^{a}) tg x < m

onde m é um número real dado. Por esse motivo, estas seis são denominadas inequações fundamentais. Assim, é necessário saber resolver as inequações fundamentais para poder resolver outras inequações trigonométricas.

II. RESOLUÇÃO DE sen x > m

99. Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $\overrightarrow{OP}_1 \approx m$. Traçamos por P_1 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que sen x > m estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado acima de r.

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais x pode pertencer, tomando o cuidado de partir de A e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.



100. Exemplo

Resolver a inequação sen $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \le x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$0u$$

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

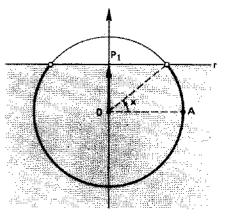
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}$$

Notemos que escrever $\frac{7\pi}{4}$ + $2k\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ + $2k\pi$ estaria errado pois, como $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$, não existe x algum neste intervalo.

III. RESOLUÇÃO DE sen x < m

101. Marcamos sobre os eixo dos senos o ponto P_1 tal que $\overline{OP}_1=m$. Traçamos por P_1 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que sen x < m estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado ebaixo de r.

Finalmente, partindo de A e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



102. Exemplo

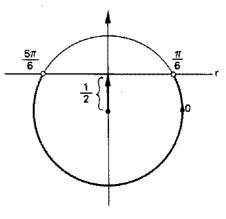
Resolver a inequação sen $x < \frac{1}{2}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

OU

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



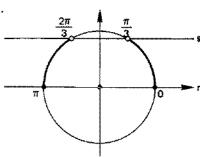
EXERCÍCIOS

C.271 Resolver a inequação $0 \le \text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre r e s.· Temos, então:

$$0 + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
ou
$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \le \pi + 2k\pi$$



C.272 Resolver a inequação sen x ≥ 0.

C.273 Resolver a inequação sen $\times \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C.274 Resolver a inequação $-\frac{1}{2} \le \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C.275 Resolver a inequação $|\sin x| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solução

$$|\operatorname{sen} x| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \operatorname{sen} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

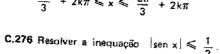
ou sen
$$x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com o semi-plano situado abaixo de r ou com o semi-plano situado acima de s.

Assim, temos:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$



C.227 Resolver a inequação $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C.278 Resolver a inequação 2 sen² x < sen x.

Solução

$$2 \operatorname{sen}^{2} x < \operatorname{sen} x \iff$$

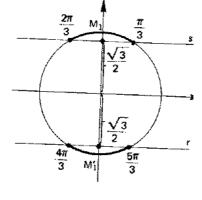
$$\implies 2 \operatorname{sen}^{2} x - \operatorname{sen} x < 0 \iff$$

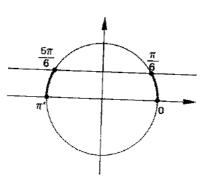
$$\implies 0 < \operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$





C.279 Resolver a inequação 4 sen² x ≥ 1.

C.280 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que sen 2x > 0.

Solução

Fazendo 2x = y, temos a inequação sen y > 0.

Examinando o ciclo, vem

$$2k\pi < v < \pi + 2k\pi$$

Como
$$x = \frac{y}{2}$$
, resulta:

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Mas $x \in [0, 2\pi]$, então só interessam as soluções particulares em que k = 0 ou 1:

$$k = 0 \Longrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$k=1 \Longrightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

C.281 Resolver a inequação sen $2x > \frac{1}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.282 Resolver a inequação sen $3x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.283 Resolver a inequação $\frac{1}{4} \le \text{sen } x \cdot \cos x \le \frac{1}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.284 Resolver a inequação $3^{2 \cdot \text{sen } x - 1} \ge 1$ supondo $x \in [0, \pi]$.

C.285 (MAPOFEI-72)

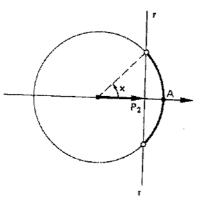
- a) Para quais valores de x existe $log_2(2 sen x 1)?$
- b) Resolver a equação

$$\log_2(2 \operatorname{sen} x - 1) = \log_4(3 \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 2).$$

IV. RESOLUÇÃO DE $\cos x > m$

103. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $\overline{OP}_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\cos x > m$ estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado à direita de r.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



104. Exemplo

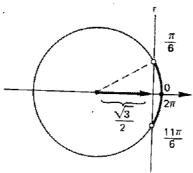
Resolver a inequação $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Procedendo conforme foi indicado temos:

$$2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ÖΙ

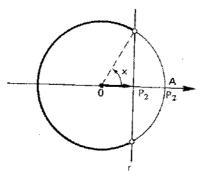
$$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



V. RESOLUÇÃO DE $\cos x < m$

105. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $\overline{OP}_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\cos x < m$ estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado à esquerda de r.

Completamos o problema descrevendo os intervalos que convêm.



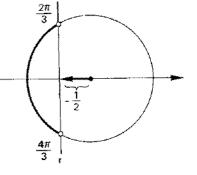
106. Exemplo

Resolver a înequação

$$\cos x < -\frac{1}{2}$$
.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$



EXERCÍCIOS

C.286 Resolver a inequação $-\frac{3}{2} \le \cos x \le 0$, para $x \in [0, 2\pi]$.

Solução

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre r e s. Temos, então:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \,.$$

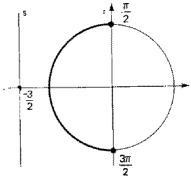
C.287 Resolver a inequação $\cos x \ge -\frac{1}{2}$.

C.288 Resolver a inequação $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C.289 Resolver a inequação $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x \le \frac{1}{2}$.

C.290 Resolver a inequação $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C.291 Resolver a inequação $|\cos x| > \frac{5}{3}$



C.292 Resolver a inequação cos 2x + cos x ≤ -1.

Solução

$$\cos 2x + \cos x \leqslant -1 \iff (2\cos^2 x - 1) + \cos x \leqslant -1 \iff$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x \leqslant 0 \iff -\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0$$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

C.293 Resolver a inequação $4 \cos^2 x < 3$.

C.294 Resolver a inequação cos 2x ≥ cos x.

C.295 Resolver a inequação sen x + $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução

Fazendo $x - \frac{\pi}{4} = y$, temos a inequação $\cos y \ge \frac{1}{2}$. Examinando o ciclo, vem:

$$2k\pi \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Ou

$$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \leqslant y \leqslant 2\pi + 2k\pi$$

isto é:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \le x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{pois } x = y + \frac{\pi}{4}.$$

C.296 Resolver a inequação sen x + cos x < 1.

C.297 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\cos 3x \le \frac{1}{2}$.

Solução

Fazendo
$$3x=y$$
, temos a inequação $\cos y \leqslant \frac{1}{2}$. Examinando o ciclo, vem:
$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Como $x = \frac{y}{3}$, resulta:

$$\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

Mas $x \in [0, 2\pi]$, então só interessam as soluções particulares em que k = 0 ou 1 ou 2:

$$k = 0 \implies \frac{\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{9}$$

οu

$$k=1 \Longrightarrow \frac{7\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{9}$$

Oi.

$$k-2 \Longrightarrow \frac{13\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{17\pi}{9}$$

C.298 Resolver a inequação $\cos 2x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.299 Resolver a inequação $\cos 4x > -\frac{1}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

c.300 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\frac{\cos x}{\cos 2x} \le 1$.

Solucão

- 1) Fazendo $\cos x = y$ e lembrando que $\cos 2x = 2\cos^2 x 1$, ternos: $\frac{y}{2y^2 - 1} \le 1 \iff \frac{y}{2y^2 - 1} - 1 \le 0 \iff \frac{2y^2 - y - 1}{2y^2 - 1} \ge 0$
- (i) Fazendo o quadro de sinais;

concluímos que o quociente é positivo para $y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $y \ge 1$.

III) Examinando o ciclo trigonométrico, para
$$0 \le x \le 2\pi$$
, temos: $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

$$-\frac{1}{2} \le \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} \frac{\pi}{4} < x \le \frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \frac{4\pi}{3} \le x < \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cos x \ge 1 \implies x = 0 \text{ au } 2\pi$$

portanto:

$$S = \{x \mid x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} < x \le \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \le x < \frac{7\pi}{4} \text{ ou } x = 2\pi\}$$

C.301 Resolved a inequação
$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{\cos x - 1} > 0$$
 supondo $x \in [0, \pi]$.

C.302 Resolver a inequação
$$\frac{\cos 2x + \sin x + 1}{\cos 2x} \ge 2$$
 supondo $x \in [0, \pi]$.

C.303 Resolver a inequação
$$2^{\cos 2x} \leqslant \sqrt{2}$$
 supondo $x \in [0, \pi]$.

C.304 Determinar o domínio da função real f dada por
$$f(x) = \sqrt{\frac{\cos 2x}{\cos x}}$$

Solução

- 1) Devemos ter $\frac{\cos 2x}{\cos x} \geqslant 0$
- II) Fazendo cos x = y, temos:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} \ge 0 \iff \frac{2y^2 - 1}{y} \ge 0$$

111) Fazendo o quadro de sinais:

		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2y² - 1	+	_	-	+
y			+	+
$\frac{2y^2-1}{y}$	-	+	-	+

concluímos que o quociente é positivo para

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant y < 0 \text{ ou } y \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV) Examinando o ciclo trigonométrico, temos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x < 0 \iff \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ & \text{ou} \end{cases}$$
$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \le x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ & \text{ou} \end{cases}$$

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi$$

C.305 (MACK-70) Determine no conjunto dos números reais o domínio de

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 \cdot \sin^2 x - 1}{\cos x}}, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

C.306 Para que valores de x, x ∈ [0, 2π], está definida a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{\text{sen } 2x - 2}{\cos 2x + 3 \cos x - 1}}$$
 ?

C.307 (MACK-71) É dada a equação

$$(2 \cos^2 \alpha) x^2 - (4 \cos \alpha) x + (4 \cos^2 \alpha - 1) - \alpha$$

sendo $0 \le \alpha \le \pi$,

- a) Para que valores de α a equação tem soluções reais?
- b) Para que valores de α a equação admite raízes reais negativas?

C.308 Para que valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, verifica-se a desigualdade:

$$\log_{\cos x} (1 + 2\cos x) + \log_{\cos x} (1 + \cos x) > 1?$$

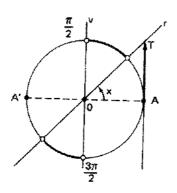
C.309 Que valores de x, $x \in [0, 2\pi]$ verificam a inequação $\sqrt{1 - \cos x} < \sin x$?

C.310 (MACK-72) Resolver, separadamente, cada um dos sistemas abaixo:

VI. RESOLUÇÃO OE tg x > m

107. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overrightarrow{AT} = m$. Traçamos a reta $r = \overrightarrow{OT}$. As imagens dos reais x tais que $tg \times x > m$ estão na intersecção do ciclo com o ângulo $r\overrightarrow{Ov}$.

Para completar descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



108 Exemplo

Resolver a inequação tg x > 1.

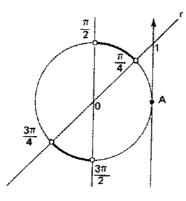
Procedendo conforme foi indicado temos:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

que podem ser resumidos em

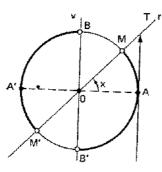
$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



VII. RESOLUÇÃO DE tg x < m

109. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overline{AT} = m$. Traçamos a reta $r = \overrightarrow{OT}$. As imagens dos reais x tais que tg x < m estão na intersecção do ciclo com o ângulo $y \hat{Or}$.

Para completar descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



110. Exemplo

Resolver a inequação $- tg \times < \sqrt{3}$. Procedendo conforme foi indicado, temos:

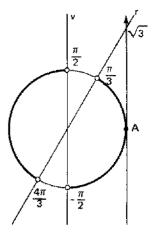
$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Οŧ

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

Οl

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



EXERCICIOS

C.311 Resolver a inequação | tg x | ≤ 1.

Solução

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com o ángulo $r \widehat{O}_S$. Temos, então:

$$0+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

οu

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

OU

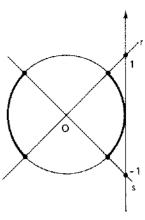
$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi$$



C.313 Resolver a inequação tg x ≤ 0.

C.314 Resolver a inequação
$$-\sqrt{3} \le \operatorname{tg} x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$
.

C.315 Resolver a inequação $|\log x| \ge \sqrt{3}$.



C.316 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tel que $1 \le tg 2x < \sqrt{3}$.

Solução

Fazendo 2x = y, temos a inequação $1 \le tg y < \sqrt{3}$.

Examinando o ciclo, vem:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Como $x = \frac{y}{2}$, resulta:

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Mas $x \in [0, 2\pi]$, então só interessam as soluções particulares em que k = 0 ou

$$k = 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \implies \frac{5\pi}{8} \le x < \frac{2\pi}{3}$$

$$k = 2 \implies \frac{9\pi}{8} \le x < \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 3 \Longrightarrow \frac{13\pi}{8} \le x < \frac{5\pi}{3}$$

C.317 Resolver a inequação $19.2x \ge -\sqrt{3}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$

C.318 Resolver a inequação $tg^2 2x \le tg 2x$ supondo $x \in [0, 2\pi]$

C.319 Resolver a inequação $tg^2 2x < 3$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

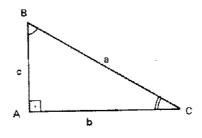
C.320 (MAPOFEI-75) Resolver a inequação: sen x > cos x, pare 0 ≤ x ≤ 27.

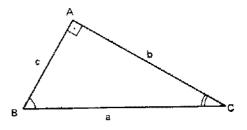
CAPÍTULO IX

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

ELEMENTOS PRINCIPAIS

111. Sabemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos è reto.





Como é habitual, vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo ABC:

lados: AB, BC, AC

ângulos internos: BAC, ABC, ACB

medidas dos lados: a = medida de BC

b = medida de AC

c = medida de AB

medidas dos ângulos: Â = medida de BÂC

B = medida de ABC

= medida de AĈB

Sempre que tratarmos de um triângulo ABC retângulo, daqui por diante estaremos pensando que o ângulo interno A mede 90°.

Sabemos que o lado BC, oposto ao ângulo reto, é chamado *hipotenusa* e os lados AB e AC, adjacentes ao ângulo reto, são chamados *catetos* do triângulo ABC.

Para simplificar nossa linguagem diremos que o triângulo ABC tem hipotenusa a e catetos b e c, isto é, vamos confundir BC, AC, AB com suas respectivas medidas a, b, c. Analogamente, diremos que os ângulos internos do triângulo são \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} .

112. Neste capítulo vamos desenvolver uma teoria geométrico-trigonométrica que permite calcular as medidas de segmentos ou ângulos de um triângulo retângulo, partindo de um número mínimo de dados.

II. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

113. Provemos algumas relações notáveis entre segmentos de um mesmo triângulo retângulo.

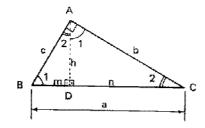
Se tomarmos um triângulo ABC retângulo e conduzirmos AD perpendicular a BC, com D em BC, obtemos:

AD = altura relativa à hipotenusa (medida: h)

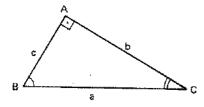
BD = projeção do cateto AB sobre a hipotenusa (medida; m)

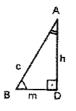
CD = projeção do cateto AC sobre a hipotenusa (medida: n)

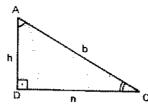
 $\hat{B} \equiv \hat{1} \ e \ \hat{C} \equiv \hat{2} \ pois \ AB \perp AC \ e \ BC \perp AD$



Na figura anterior podemos observar três triângulos ΔABC, ΔDBA e ΔDAC que são semelhantes por apresentarem ângulos dois a dois congruentes.







Temos, então, as seguintes propriedades:

1ª)
$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \implies \frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \implies \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

isto é, cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e a projeção dele sobre ela.

2ª)
$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{h}$$

$$bc = ah$$

isto é, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

3?)
$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \implies \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

$$h^2 = mn$$

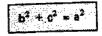
isto é, a altura relativa à hipotenusa è média geométrica entre os segmentos que determina na hipotenuse.

4ª) Teorema de Pitágoras

Somando membro a membro as duas primeiras relações, temos:

$$c^2 = am$$

 $b^2 = an$ $b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = aa = a^2$



isto é, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

114. Outra propriedade notável dos triángulos retângulos pode ser vista se tomarmos os pontos médios dos lados (M, N, O) e ligarmos conforme a figura. O polígono AMON é um retángulo, portanto:

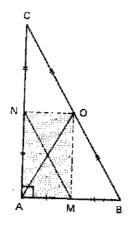
$$OA = MN = \frac{BC}{2}$$

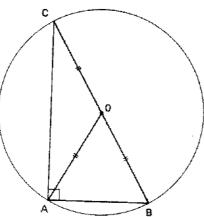
isto è, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade desta.

Como consequência temos que

$$OA \equiv OB \equiv OC = \frac{a}{2}$$

e, portanto, todo triângulo retángulo pode ser inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é a hipotenusa.





EXERCÍCIOS

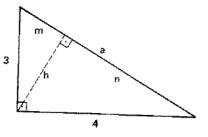
C.321 Calcular os elementos indicados na figura ao lado.

Solução

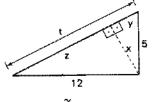
Sendo c = 3 e b = 4, vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow a = 5$$

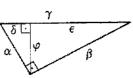
 $h = \frac{b \cdot c}{a} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$,
 $m = \frac{c^2}{a} = \frac{9}{5}$ e
 $n = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5}$



C.322 Calcular os elementos x, y, z, t na figura a o lado.



C.323 Escrever 6 relações métricas envolvendo elementos da figura ao lado.



- C.324 Calcular a área de um triángulo retángulo em que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medam, respectivamente, 4 e 9.
- C.325 Calcular a hipotenusa de um triángulo retángulo de parimetro 56 e altura 25.
- C.326 Um triângulo isósceles ABC tem base a = 12 a está inscrito numa circunferência de diámetro 2R = 20. Calcular as medidas dos lados b e c do triângulo.

Solução

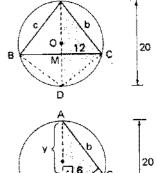
Ligando o vértice A ao centro 0 da circunferência, obtemos uma reta que corta a circunferência em D. Notemos que o segmento AD é diámetro. Notemos ainda que AD é mediatriz do segmento BC, portanto AD L BC e BM = MC. Destacando o triángulo ADC, temos:

$$6^2 = y(20 - y) \implies y^2 - 20y + + 36 = 0 \implies y = 2 \text{ ou } y = 18$$

então:

$$b^2 = 6^2 + y^2 \implies b^2 = 40$$
 ou $b^2 = 360$

Resposta: $b = c = 2\sqrt{10}$ ou $b = c = 6\sqrt{10}$



C.327 Calcular a altura de um triángulo isósceles conhecendo o raio R da circunferência circunscrita e a base a. Dados: R = 5 e a = 8.

C.328 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triángulo isosceles de base 6 tendo outro lado medindo $\sqrt{90}$.

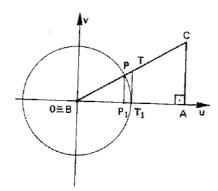
C.329 Um ponto P dista d = 13 do centro 0 de uma circunferência de raio R = 5. Se traçarmos por P uma rata tangente à circunferência no ponto T, qual a medida do segmento PT?

C.330 Calcular o lado de um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio R.

III. PROPRIEDADES TRIGONOMÉTRICAS

115. Vamos provar as três propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulos de um triângulo retângulo ABC.

Para isso vamos considerar uma circunferência de raio unitário e centro no vértice B e vamos fixar um sistema u0v de referência como mostra a figura.



1ª) △BPP₁ ~ △BCA, então

$$\frac{P_1P}{BP} = \frac{CA}{BC} \longrightarrow \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{1} = \frac{b}{a} \longrightarrow$$

$$\operatorname{sen}\widehat{\mathsf{B}} = \frac{\mathsf{b}}{\mathsf{a}}$$

isto é, o seno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa.

2ª) ΔΒΡΡ₁ ~ ΔΒCA, então

$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC} \longrightarrow \frac{\cos \widehat{B}}{1} = \frac{c}{a} \longrightarrow \cos \widehat{B} = \frac{c}{a}$$

isto é, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa,

3ª) ABTT₁ ~ ABCA, então

$$\frac{T_1T}{OT_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \longrightarrow \frac{\operatorname{tg}\widehat{B}}{1} = \frac{b}{c} \longrightarrow \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{b}{c}$$

isto é, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo.

116. Observações

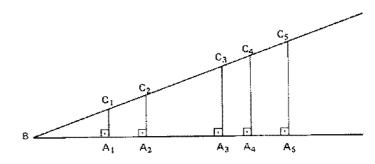
1ª) Notando que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ}$ e $\widehat{A} = 90^{\circ}$, decorre $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^{\circ}$, isto é, \widehat{B} e \widehat{C} são complementares, portanto:

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \cos \widehat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \widehat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \widehat{C} = \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \widehat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{1}{\operatorname{tg} \widehat{B}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto a } \widehat{C}}{\text{cateto adjacente a } \widehat{C}}$$

 2^{a} .) Decorre das três propriedades vistas que, sendo dado um ângulo agudo \widehat{B} , se marcarmos sobre um de seus lados os pontos A_1 , A_2 , A_3 , ... e conduzirmos por eles as perpendiculares A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 , ... (conforme a figura abaixo), temos:



$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{A_1 C_1}{BC_1} = \frac{A_2 C_2}{BC_2} = \frac{A_3 C_3}{BC_3} = \dots$$

(fixado \widehat{B} , o cateto oposto a \widehat{B} e a hipotenusa são diretamente proporcionais).

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \dots$$

(fixado \hat{B} , o cateto adjacente a \hat{B} e a hipotenusa são diretamente proporcionais).

$$tg\hat{B} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = ...$$

(fixado \widehat{B} , os catetos aposto e adjacente a \widehat{B} são diretamente proporcionais).

EXERCÍCIOS

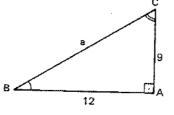
C.331 Calcular os ángulos internos de um triángulo retângulo cujos catetos são b=9 e c = 12.

Solução

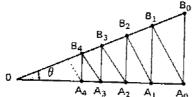
$$tg \widehat{B} = \frac{b}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$tg \, \widehat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Resposta: $\hat{B} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \hat{C} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$



- C.332 Calcular os ludos de um triángulo retângulo sabendo que a altura relativa á hipotenusa é h = 4 e um angulo agudo é $\hat{B} = 30^{\circ}$.
- C.333 Calcular os lados de um triángulo retângulo sabendo que a altura relativa à hipotenusa mede 4 e forma ângulo de 15º com o cateto b.
- C.334 Calcular os catetos de um triângulo retángulo ABC sabendo que está inscrito em uma circunferência de raio 3 e tem ángulos agudos tais que $\hat{B} = 2\hat{C}$,
- C.335 Calcular os ângulos agudos de um triángulo retângulo de hipotenusa 20, sabendo que a mediana relativa a um dos catetos mede 15.
- C.336 (FFCLUSP-66) Na figura ao lado, os àngulos $O\widehat{A}_iB_i$ e $O\widehat{B}_{i+1}A_i$, i=0,1,2,3,...são retos. Quanto vale a some dos segmentos A₀B₀, A₁B₁, A₂B₂, ... em função de A₀B₀ e de θ ?



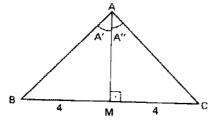
- C.337 Calcular o ángulo formado pela diagonal e o menor lado de um retángulo cujos lados estão na razão 💆
- C.338 Calcular a área de um triángulo isòsceles ABC cuja base é a ≈ 8 , sabendo que $\widehat{A}\approx 45^\circ$.

Solução

Traçando a altura AM, o triángulo ABC fica dividído em duas partes congruentes onde $\hat{A}' = \hat{A}'' = 22^{\circ}30'$, BM = MC = 4.

$$\implies$$
 AM = $\frac{MC}{19.22^{\circ}30'} = \frac{4\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

$$S = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{16\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$



- c.339 Calcular a altura de um triángulo isósceles de perímetro. 2p = 36, sabendo que os ángulos adjacentes à base são iguais a arc cos $\frac{2}{7}$.
- C.340 Calcular o raio da circunteréncia circunscrita a um triàngulo isòsceles de base a = 8 e ángulo oposto á base = 120°.
- C.341 Um reta determina, sobre uma circunferência de taio 10, uma corda de comprimento 16. Qual é a medida do ángulo central sob o qual se vé a corda?
- C.342 Determinar o ángulo B de um triángulo ABC retangulo em A sabendo que se verifica a relação $\frac{1}{r} + \frac{2}{h} = \frac{\sqrt{5}}{h}$, onde h é a altura relativa à hipotenusa.
- C.343 Em um triângulo ABC retângulo em A sabe-se que o ángulo agudo formado pelas medianas BM e CN é $\theta=30^\circ$, Calcular o ângulo $\hat{\mathbb{C}}$.
- C.344 Em um triàngulo ABC retàngulo em A traçam-se as bissetrizes internas BB' e CC'. Sa bendo que AB' = 1 e AC' = 1, calcular o àngulo \widehat{B} e a hipotenusa a.
- C,345 Calcular os ángulos agudos do triângulo retángulo de hipotenusa a = 13m, sabendo que o raio da circunferência inscrita è r = 2.
- C.346 Um observador vé um prédio, construído em terreno plano, sob um àngulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob ángulo de 45°. Qual é a altura do prédio?

Solucão

No triángulo BXY, temos

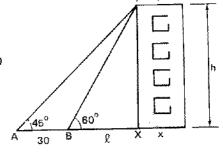
$$tg 60^\circ = \frac{h}{\chi} \implies \chi = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

No triângulo AXY, temos:

$$tg 45^{\circ} = \frac{h}{0 + 30} \implies h = 9 + 30$$

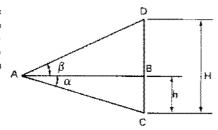
$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \Longrightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Resposta: $\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ m



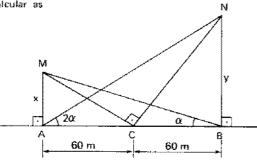
- C.347 (MAUÁ-68) Para medir a altura da torre vertical DE toma-se, no plano horizontal que passa pela sua base D, o segmento AB de comprimento 12 m e cujo ponto médio é C. Madem-se os ángulos DÂE, DBE e DĈE verificando-se que DÂE = DBE = 45° e DĈE = 60°. Determinar a altura da torre.
- C.348 Calcular a distància entre os parapeitos de duas janelas de um arranha-céu, conhecendo os angulos (α e β) sobre os quais são observadas de um ponto σ do solo, a distán-
- cia d do prédio.

C.349 (MAUÁ-65) Para obter a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal AB e mediu os ángulos α e β tendo a seguir medido BC = h. Determinar a altura do chaminé.



C.350 (MAUÁ-67) Um observador encontra se na Via Anhanguera em trecho retilíneo, horizontal e situado no mesmo plano vertical que contém a torce de TV do canal 13, localizada no pico do Jaraguá. De duas posições A e B desse trecho retilíneo e distantes 60 m uma da outra, o observador vê a extremidade superior da torce, respectivamente, sob os ángulos de 30° e 31°53′. O aparelho utilizado para medir os ángulos foi colocado a 1,50 m acima da pista de concreto que está a 721,50m acima do nível do mar. Determinar a altura da torce em relação ao nível do mar. Dedo: tg 31°53′ = 0,62.

C.351 (LINS-66) Tendo em vista as relações descritas na figura ao lado calcular as distâncias x e y.



IV. RESOLUÇÃO OE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

117. Resolver um triângulo retângulo significa calcular seus elementos principais, isto é, seus ângulos agudos (\widehat{B} e \widehat{C}) e seus lados (a, b, c). Para obter esses elementos é necessário que sejam dadas duas informações sobre o triângulo, sendo uma delas, pelo menos, a medida de um segmento ligado ao triângulo (lado, mediana, mediatriz, etc).

Há cinco problemas clássicos de resolução de triângulos retângulos, que abordaremos com especial destaque.

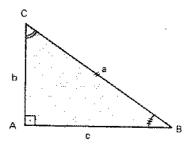
118. 19 problema

Resolver um triángulo retângulo, sendo dados: a hipotenusa (a) e um dos ângulos agudos (\widehat{B}) .

Solução

$$c = a \cdot \cos \hat{B}$$

$$\hat{C} = 90^{\circ} - \hat{B}$$



119. 20 problema

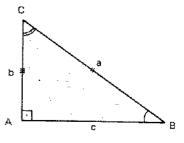
Resolver um triángulo retângulo, sendo dados: a hipotenusa (à) e um dos catetos (b).

Solução

$$c^2 = a^2 - b^2 \implies c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\operatorname{sen} \widehat{\mathsf{B}} = \frac{\mathsf{b}}{\mathsf{a}} \implies \widehat{\mathsf{B}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\mathsf{b}}{\mathsf{a}}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \implies \hat{C} = \arccos \frac{b}{a}$$



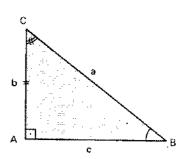
120. 3º problema

Resolver um triângulo retângulo, sendo dados: um cateto (b) e o ángulo adjacente a ele (\widehat{C}) .

Solução

$$c = b \cdot tg \hat{C}$$

$$\hat{B} = 90^{\circ} - \hat{C}$$



121. 4º problema

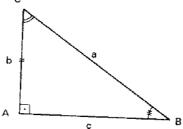
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados um cateto (b) e o ângulo oposto a ele (\hat{B}) .

Solução

$$c = \frac{b}{tg \ \widehat{B}}$$

$$a = \frac{b}{\text{sen }\widehat{B}}$$

$$\hat{C} = 90^{\circ} - \hat{B}$$



122. 5º problema

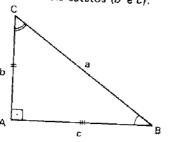
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados os dois catetos ($b \in c$).

Solução

$$a^2 = b^2 + c^2 \implies a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$tg \hat{B} = \frac{b}{c} \implies \hat{B} = arc tg \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{c}{b} \implies \widehat{C} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b}$$



EXERCICIOS

C.352 Resolver um triàngulo retàngulo ABC conhecendo a medida da bissetriz interna $S_b = 5$ e o àngulo $\widehat{C} = 30^\circ$.

Solução

É imediato que
$$\hat{B} = 60^{\circ}$$
 e $\frac{\hat{B}}{2} = 30^{\circ}$.

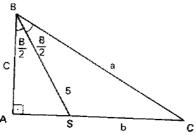
No triângulo retângulo ABS, temos:

$$c = 5 \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

então

$$a = \frac{c}{\cos \hat{\beta}} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{75 - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$



- C.353 Resolver um triángulo retángulo ABC sendo dados b = 3 e $a c = \sqrt{3}$.
- C.354 Resolver um triângulo ABC retângulo em A sabendo que la + b = 18 le la + c = 25.
- C.355 Resolver um triângulo retângulo ABC sabendo que a=4 e a medida da bissetriz interna BE é $S_b=6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$
- C.356 Resolver um triàngulo retângulo conhecendo a altura h = 1 relativa à hipotenusa e o perímetro $2p = 2\sqrt{2} + 2$.
- C.357 Resolver um triânguló isósceles ABC sebendo que a altura relativa à base BC mede h = 24 e o perímetro é 2p = 64.
- C.358 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo o raio $\gamma=2$ da circunferência inscrita e a altura $h=\frac{60}{13}$ relativa á hipotenusa.
- C.359 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo a altura h=2 relativa á hipotenusa e o raio $r'=2\sqrt{2+2}$ da circunferência ex-inscrita situada no àngulo reto.

TRIÂNGULOS **QUAISQUER**

I. PROPRIEDADES TRIGONOMÉTRICAS

123, Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração

1º) Seja ABC um triângulo com < 90°.

No ΔBCD, que é retângulo:

$$a^2 = n^2 + h^2$$
 (1)

No ΔBAD, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2$$
 (11)

Temos também:

Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

m

Mas, no triângulo BAD: m = c + cos Â.

 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ Logo:

EXERCÍCIOS

C.360 Dois lados de um triángulo medem 8 m e 12 m e formam entre si um ángulo de 120°. Calcular o terceiro lado.

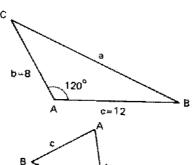
Satucão

Adotando a notação da figura ao lado e aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2bc \cdot \cos \hat{A} =$$

$$= 8^{2} + 12^{2} - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120^{\circ} =$$

$$= 64 + 144 + 96 = 304$$
então $a = \sqrt{304} = 4\sqrt{19} \text{ m}.$



C.361 (FEI-77) Calcular c, sabendo que

$$a = 4$$

$$b = 3\sqrt{2}$$

$$\hat{c} = 45^{\circ}$$

- C.362 (MAPOFEI-76) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 m e 12 m e formam um ángulo de 60°. Calcular as diagonais.
- C.363 Se um paralelogramo tem lados medindo 4 m e 5 m e formando entre si um ângulo de 30°, qual é o àngulo que a diagonal maior forma com o menor lado?
- C.364 Um triángulo tem lados a = 10 m, b = 13 m e c = 15 m. Calcular o àngulo A do triângulo.

Solução

Da lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \implies \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{13^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{169 + 225 - 100}{390} = \frac{294}{390} = \frac{49}{65}$$

portanto $\hat{A} = \arccos \frac{49}{ce}$

- **C.365** Calcular os très ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que a = 2, $b = \sqrt{6}$
- C.366 Os lados a, b, c de um triângulo ABC são diretamente proporcionais aos números 5, 7 e 9, respectivamente. Calcular o ângulo B.
- C.367 (EPUSP-60) Demonstrar que se os lados de um triângulo tém medidas expressas por números racionais, então os cossenos dos ángulos internos também são números racionais,

c.368 (EPUSP-56) Os lados de um triângulo são dados pelas expressões:

$$a = x^2 + x + 1$$
, $b = 2x + 1$ e $c = x^2 - 1$.

Demonstrar que um dos ángulos do triângulo mede 120°.

- **C.369** Calcular o lado c de um triàngulo ABC sendo dados $\widehat{A} = 120^{\circ}$, b = 1 e $\frac{a}{\pi} = 2$.
- C.370 (EPUSP-60) Determinar os comprimentos dos lados de um triàngulo que tem para vértices os centros dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo de lados 6, 8 e 10.
- C.371 (MAUÁ-67) Provar que num triàngulo ABC retàngulo em A, vale a relação (a b)2 = $= c^2 - 4ab - sen^2 \frac{\widehat{C}}{2}.$
- C.372 Qual é a relação entre os lados a, b, c de um triângulo ABC para que se tenha:
 - a) ABC retangulo?
 - b) ABC acutángulo?
 - c) ABC obtusânaulo?

Solução

Admitamos que a sela o maior lado do triânquio ABC, isto é, a ≥ b e a ≥ c. Sabemos da Geometria que ao major lado opõe-se o major ângulo do triângulo, portanto, ≥ B e ≥ C. Assim. temos:

 \triangle ABC é retàngulo \iff $\widehat{A} = 90^{\circ}$ \triangle ABC é acutàngulo \iff $0^{\circ} < \widehat{A} < 90^{\circ}$

∆ABC é obtusăngulo ←→ 90° < Â < 180°

Por outro lado, da lei dos cossenos, temos:

$$a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \implies \cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Então, vem:

a) $\hat{A} = 90^{\circ}$ \iff $\cos \hat{A} = 0$ \iff $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ \iff $a^2 = b^2 + c^2$

b) $0^{\circ} < \hat{A} < 90^{\circ} \iff \cos \hat{A} > 0 \iff b^{2} + c^{2} - a^{2} > 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2}$ c) $90^{\circ} < \hat{A} < 180^{\circ} \iff \cos \hat{A} < 0 \iff b^{2} + c^{2} - a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} + c^{2} = a^{2} < 0 \iff a^{2} < b^{2} < b^$

Conclusão: um triángulo ABC è respectivamente retángulo, acutángulo ou obtusángulo, conforme o quadrado de seu maior lado seja igual, menor ou maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados.

- C.373 Classificar segundo as medidas dos ângulos internos os triángulos cujos lados são:
 - a) 17, 15, 8
- b) 5, 10, 6

- c) 6, 7, 8
- C.374 (EPUSP-61) Os lados de um triânquio obtusânquio estão em progressão geométrica crescente. Determinar a razão da progressão.

 2°) Seja ABC um triàngulo com $90^{\circ} < \hat{A} < 180^{\circ}$

No ΔBCD, que é retángulo

$$a^2 = n^2 + h^2$$
 (1)

No ΔBAD, que é retàngulo:

$$h^2 = c^2 - m^2$$
 (11)

Temos também:

$$n = b + m$$
 (111)

Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

Mas, no $\triangle BAD$, $m = c \cdot \cos(180^{\circ} - \hat{A}) \implies m = -c \cdot \cos \hat{A}$

Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

3º) Analogamente, podemos provar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos \hat{B}$$

 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos \hat{C}$

124. Lei dos senos

Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

Demonstração

Seja ABC um triângulo gualquer, inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente BA e liguemos A' com C.

Sabemos que $\widehat{A} = \widehat{A}'$ por determinarem na circunferência a mesma corda BC. O triângulo A'BC é retângulo em C por estar inscrito numa semi-circunferência.



$$a = 2R \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}' \implies a = 2R \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} \implies \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = 2R$$

Analogamente:
$$\frac{b}{\operatorname{sen }\widehat{B}} = 2R = \frac{c}{\operatorname{sen }\widehat{C}} = 2R$$

Donde concluímos a tese:

$$\frac{a}{\operatorname{sen } A} = \frac{b}{\operatorname{sen } B} = \frac{c}{\operatorname{sen } C} = 2R$$

EXERCÍCIOS

C.375 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que a = 15 cm e = 30°.

Solucão

Da lei dos senos temos:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{15}{\sin 30^{\circ}} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \text{ cm}$$

então R = 15 cm.

C.376 Calcular os lados b e c de um triângulo ABC no qual a=10, $\hat{B}=30^{\circ}$ e $\hat{C}=45^{\circ}$.

Solução

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} \implies \hat{A} = 180^{\circ} - 30^{\circ} - 45^{\circ} = 105^{\circ}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \implies b = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \implies c = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

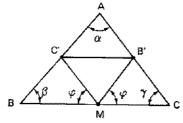
C.377 (EPUSP-61) Quais são os ângulos \hat{B} e \hat{C} de um triângulo ABC para o qual $\hat{A}=15^{\circ}$, sen $\hat{B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e sen $\hat{C}=\frac{\sqrt{2}}{2}$?

- C.378 Calcular os ángulos \hat{B} e \hat{C} de um triângulo em que a = 1, b = $\sqrt{3}$ + 1 e \hat{A} = 15°.
- **C.379** Em um triângulo ABC sabe-se que a = 2b e $\hat{C} = 60^{\circ}$. Calcular os outros dois ángulos.
- **C.380** Calcular os ángulos de um triángulo ABC sabendo que $\frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $\hat{C} = 2\hat{A}$.
- C.381 Calcular o lado c de um triàngulo ABC em que $a = 6 \, \text{m}$, $b = 3 \, \text{m}$ e $\hat{A} = 3\hat{B}$.
- C.382 (MAPOFE1-71) São conhecidos os seguintes elementos de um triângulo ABC: o perímetro 2p e os ângulos $A=\alpha$, $B=\beta$
 - a) Descraver um processo de construção do triângulo.
 - b) Calcular os comprimentos de seus lados.
- C.383 (EPUSP-62) Demonstrar que num quadrilátero ABCD onde ABB = ABB, tem-se:

$$AB = \frac{CD \cdot sen A\widehat{D}B}{sen C\widehat{B}D}$$

- C.384 (MACK-66) O lado de um triângulo equilátero de lado 3 m é dividido em três partes iguais. Determinar os 3 ângulos que se obtêm umindo os pontos de divisão ao vértice oposto (as respostas devem ser dadas em termos de funções trigonométricas inversas).
- C.385 (MACK-67) Do ponto médio dos lados AB e AC de um triângulo ABC traçam-se duas retas que se cortam num ponto M do terceiro lado BC e que formam com este lado ângulos igueis cujo valor é φ .

Prove que:
$$\cot \varphi = \frac{\sec \alpha}{2 \sec \beta \cdot \sec \gamma}$$



C.386 Um observador colocado a 25 m de um prédio vé o editício sob certo ángulo. Afastando-se em linha reta mais 50 m, nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?

Solução

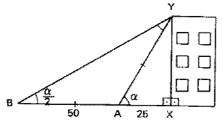
No triângulo ABY o ângulo externo α é igual à soma dos internos não adjacen-

tes
$$\frac{\alpha}{2}$$
 e B \hat{Y} A, então:

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + B\widehat{Y}A \implies B\widehat{Y}A = \frac{\alpha}{2}$$

Assim o triángulo ABY é isósceles, portanto, AY = AB = 50 m.

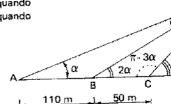
No triângulo retângulo AXY, temos:



$$XY^2 = AY^2 - AX^2 = 50^2 - 25^2 = 1875$$
 \longrightarrow $XY = 25\sqrt{3} \text{ m}.$

C.387 (EPUSP-50) O ângulo sob o qual um observador ve uma torre duplica quando ele se aproxima 110 m e triplica quando se aproxima mais 50 m.

Calcular a altura da torre.



C.388 (MAUA-66) Sendo a, b dois lados de um triángulo e Â, B os ângulos opostos correspondentes, provar que:

$$a^2 \cdot \cos 2B - b^2 \cdot \cos 2A = a^2 - b^2$$

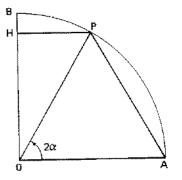
- C.389 Calcular o ángulo \hat{B} ($\hat{B}>45^{o}$) de um triángulo retângulo ABC sabendo que a=4 e a medida da bissetriz interna AB é $S_{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.
- C.390 Em um triângulo ABC retângulo em \widehat{A} sabe-se que $\frac{S_b \cdot S_c}{s^2} = \frac{\sqrt{6} \sqrt{2}}{2}$ onde S_b e S_c são as medidas das bissetrizes dos ángulos agudos. Calcular \widehat{B} .
- C.391 Calcular o ângulo \hat{B} de um triàngulo isosceles ABC conhecendo a base a=1 e a bissetriz $S_b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- C.392 (MAPOFEI-70) É dado um quarto de circunferência de centro O e raio r, limitado pelos pontos A e B (ver figura). Sendo P um ponto do arco AB, H projeção ortogonal de P sobre OB e 2α o ângulo AÔP.
 - a) mostrar que se AP HP = r, então $\cos \alpha = \lg \alpha$;
 - b) verificada a condição do item anterior, determinar sen α;
 - c) sendo a um ângulo compreendido entre 0º e 90º, tal que

sen
$$\alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$$
,

determiná-lo com a precisão de um segundo arco, utilizando a tabela abaixo.

ANGULO	SENO
38°8′	0,617494
38°9'	0,617722
38°10′	0,617951
38°11′	0,618180
38°12′	0,618408

Nota: √5 ≅ 2,236068



125. Teorema

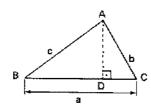
Em qualquer triángulo, valem as relações seguintes:

a = b · cos Ĉ + c · cos B b = a · cos Ĉ + c · cos Â c = b · cos + c · cos B

Demonstração

Vamos provar só a primeira delas:

19) Seja ABC um triângulo com $\,\widehat{B} < 90^\circ\,\,$ e $\,\widehat{C} < 90^\circ\,\,$

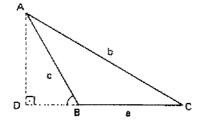


No $\triangle ABD$, que é retângulo: $BD = c \cdot \cos \widehat{B}$ No $\triangle ADC$, que é retângulo: $DC = b \cdot \cos \widehat{C}$ então:

$$a = BD + DC = c \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{C}$$

2°) Seja ABC um tríângulo com $90^{\circ} < \hat{B} < 180^{\circ}$ ou $90^{\circ} < \hat{C} < 180^{\circ}$

No $\triangle ABD$, que é retângulo: $BD = c \cdot \cos (180^{\circ} - \hat{B})$ No $\triangle ADC$, que é retângulo: $DC = b \cdot \cos \hat{C}$



então:

$$a = DC - DB = b \cdot \cos \hat{C} - c \cdot \cos (180^{\circ} - \hat{B}) = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

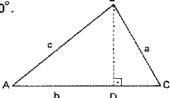
126. Teorema

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semi-produto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.

Demonstração

1?) Seja ABC um triángulo com $\,\,\widehat{A} < 90^\circ$.

então:

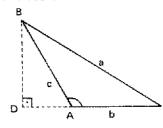


$$S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{bc}{2} \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}$$

 2°) Seja ABC um triángulo com $90^{\circ} < \hat{A} < 180^{\circ}$.

$$DB = c \cdot sen (180^{\circ} - \widehat{A}) = c \cdot sen \widehat{A}$$

então:



$$S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$$

39) Analogamente provamos que:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}$$

$$S = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}$$

127. Teorema

Em qualquer triângulo, a área é igual ao produto dos três lados dividido pelo quádruplo do raio da circunferência circunscrita.

Demonstração

De acordo com a lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 2R \implies \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{2R}$$

Pelo teorema anterior, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}$$

Substituindo (1) em (2), decorre

128. Teorema

Em qualquer triângulo não isósceles nem retangulo valem as relações sequintes:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg \quad \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}{tg \quad \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{tg \quad \frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}}{tg \quad \frac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}}, \quad \frac{tg \quad \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}{tg \quad \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}$$

Demonstração

Partindo da lei dos senos e usando propriedade das proporções, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \implies \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \implies \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{A} + \operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{A} - \operatorname{sen}\widehat{B}} =$$

$$=\frac{2 \operatorname{sen}'(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}) \cdot \cos(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}) \cdot \cos(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2})} = \frac{\operatorname{tg}(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2})}{\operatorname{tg}(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2})}$$

As outras duas são provadas de modo análogo.

EXERCÍCIOS

- C.393 Calcular o lado a de um triángulo ABC sabendo a medida da altura h_a e as medidas dos ángulos α e β que h_a forma com c e b, respectivamente.
- **C.394** Calcular a área de um triángulo que tem dois lados de medidas conhecidas, b = 7 m e c = 4 m, formando entre si um ângulo de 60° .
- C.395 (MAPOFEI-75) Calcular a área do triángulo ABC, sendo $\overline{AB} = 4$ cm, $\hat{A} = 30^{\circ}$ e $\hat{C} = 45^{\circ}$.
- C.396 (MAPOFEI-74) As diagonais de um paralelogramo medem 10 m e 20 m e formam um ângulo de 60°. Achar a área do paralelogramo.
- C.397 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC de área 20 cm², o qual tem dois lados formando ângulo agudo e com medidas 8 m a 10 m, respectivamente.
- C.398 Sejam a e b as medidas de dois segmentos BC e CA que têm uma extremidade comum e formam entre si um ângulo θ . Pede-se:
 - a) esboçar o gráfico da área S do triángulo ABC em função de heta;
 - b) dizer para que valor de θ é máximo o valor de S;
 - c) estabelecer qual é o acréscimo porcentual em S quando θ passa de 30° para 120°.
- C.399 Demonstrar que em todo triángulo ABC valem as seguintes relações:

1) a · sen
$$(\widehat{B} - \widehat{C})$$
 + b · sen $(\widehat{C} - \widehat{A})$ + c · sen $(\widehat{A} - \widehat{B})$ = 0

II)
$$a \cdot \cos (\hat{B} - \hat{C}) = b \cdot \cos \hat{B} + c \cdot \cos \hat{C}$$

III)
$$(b+c) \cdot \cos A + (c+a) \cdot \cos B + (a+b) \cdot \cos C = a+b+c$$

$$|V| \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{A} - \widehat{B})}{\operatorname{sen}(\widehat{A} + \widehat{B})}$$

V)
$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2} = \frac{\lg \hat{A}}{\lg \hat{B}}$$
 ($\hat{B} \neq 90^\circ$)

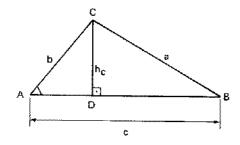
$$VI) a = \frac{(b+c) \cdot sen \frac{\hat{A}}{2}}{cos \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}}$$

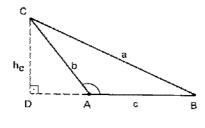
VII)
$$a = \frac{(b-c) \cdot \cos \frac{\widehat{A}}{2}}{\sec \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}$$
 ($\widehat{B} \neq \widehat{C}$)

II. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Vamos deduzir fórmulas que permitem o cálculo de segmentos notáveis de um triângulo (alturas, medianas, bissetrizes internas, raio da circunferência circunscrita, etc) tendo apenas as medidas dos lados e dos ângulos internos.

128. Alturas





No triângulo ADC retângulo, temos:

$$h_n = b \cdot sen \hat{A}$$

então

$$\begin{array}{lll} h_{c}^{2} &= b^{2} \cdot sen^{2} \widehat{A} = b^{2}(1 - cos^{2} \widehat{A}) = b^{2} - b^{2} \cdot cos^{2} \widehat{A} = \\ &= b^{2} - b^{2} \cdot (\frac{b^{2} + c^{2} - a^{2}}{2bc})^{2} = \frac{4b^{2}c^{2} - (b^{2} + c^{2} - a^{2})^{2}}{4c^{2}} = \\ &= \frac{(2bc)^{2} - (b^{2} + c^{2} - a^{2})^{2}}{4c^{2}} = \\ &= \frac{(2bc + b^{2} + c^{2} - a^{2})(2bc - b^{2} - c^{2} + a^{2})}{4c^{2}} = \\ &= \frac{[(b + c)^{2} - a^{2}][a^{2} - (b - c)^{2}]}{4c^{2}} = \\ &= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^{2}} = \\ &= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4c^{2}} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^{2}} \end{array}$$

portanto

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

De maneira análoga, teríamos:

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
 e $h_b = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

130, Área

Das fórmulas que dão as alturas decorre uma fórmula para a área do triângulo, chamada fórmula de Hierão:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

então

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

131. Medianas

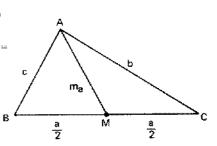
Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo AMC, temos:

$$m_a^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \widehat{C} =$$

$$= b^2 + \frac{a^2}{4} - b \cdot a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{4b^2 + a^2 - 2a^2 - 2b^2 + 2c^2}{4} =$$

$$= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$



portanto

$$m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

De forma análoga teríamos:

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_e = \frac{1}{2} \sqrt{2(e^2 + b^2) - c^2}$$

132. Bissetrizes internas

No triângulo ABS, temos:

$$\frac{x}{c} = \frac{\text{sen } \frac{\hat{A}}{2}}{\text{sen } \alpha}$$

No triângulo ACS, temos:

$$\frac{y}{b} = \frac{\text{sen } \frac{\widehat{A}}{2}}{\text{sen } \alpha}$$

β x S γ a

Então, vem:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \implies \frac{x}{y} = \frac{c}{b} \implies \frac{x}{x+y} = \frac{c}{b+c} \implies$$

$$\implies \frac{x}{a} = \frac{c}{b+c} \implies x = \frac{a \cdot c}{b+c}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABS, temos:

$$s_a^2 = x^2 + c^2 - 2xc \cdot \cos \widehat{B} =$$

$$(\frac{a \cdot c}{b + c})^2 + c^2 - 2 \cdot (\frac{a \cdot c}{b + c}) \cdot c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$

$$= \frac{2b^2 c^2 + c^3 b + cb^3 - a^2 bc}{(b + c)^2} = \frac{bc[(b + c)^2 - a^2]}{(b + c)^2} =$$

$$= \frac{bc(a + b + c)(b + c - a)}{(b + c)^2} = \frac{bc(2p)(2p - 2a)}{(b + c)^2}$$

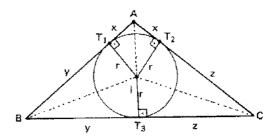
então:

$$s_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

De forma análoga teríamos:

$$s_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}$$
 e $s_0 = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$

133. Raio da circunferência inscrita



Ligando cada vértice do triângulo ABC com o centro I da circunferência, dividimos ABC em três triângulos ABI, ACI e BCI, então:

$$S_{ABC} = S_{ABi} + S_{ACi} + S_{BCi} =$$

$$= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{a + b + c}{2} \cdot r = p \cdot r$$

então:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot r$$

portanto

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Uma outra forma de calcular r seria notar que:

$$tg \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{T_1 I}{AT_1} = \frac{r}{x}, \quad tg \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{T_1 I}{BT_1} = \frac{r}{y}, \quad tg \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{T_2 I}{CT_2} = \frac{r}{z} \quad (1)$$

e mais:

$$x + y = c$$
, $y + z = a$, $z + x = b$

portanto, resolvendo o sistema, vem:

$$x = \frac{b+c-a}{2} = p-a$$
, $y = \frac{a+c-b}{2} = p-b$, $z = \frac{a+b-c}{2} = p-c$ (2)

e, finalmente, substituindo (2) em (1) vem:

$$r = (p - a) \cdot tg \frac{\widehat{A}}{2}$$
 $r = (p - b) \cdot tg \frac{\widehat{B}}{2}$

$$r = (p - c) + tg \frac{\hat{C}}{2}$$

134. Raio da circunferência circunscrita

Vimos anteriormente que:

$$S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

então

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

EXERCICIOS

- C.400 Calcular as alturas, as medianas, as bissetrizes internas e os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8.
- C.401 Os lados de um triángulo ABC são a \pm 5, b \pm 6 e c \pm 7. Calcular a medida da mediana m_a e o ângulo agudo que ela forma com o lado BC.
- C.402 Calcular a medida da bissetriz interna S_a do triángulo ABC em que $\widehat{A}=30^o$, b=30 m e c=15 m.
- C.403 Calcular os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triángulo ABC no qual $a=13,\ b=4\ e\ \cos\hat{C}=-\frac{5}{13}$.
- C.404 Designando por r_a, r_b e r_c os raios das circunferências ex-inscritas ao triángulo ABC nos ángulos A, B e C, respectivamente, provar que:

1)
$$r_a = p \cdot tg \frac{\widehat{A}}{2} = (p - b) \cdot cotg \frac{\widehat{C}}{2} = (p - c) \cdot cotg \frac{\widehat{S}}{2}$$

11) $r_b = p \cdot tg \frac{\widehat{S}}{2} = (p - a) \cdot cotg \frac{\widehat{C}}{2} = (p - c) \cdot cotg \frac{\widehat{A}}{2}$
111) $r_c = p \cdot tg \frac{\widehat{C}}{2} = (p - a) \cdot cotg \frac{\widehat{B}}{2} = (p - b) \cdot cotg \frac{\widehat{A}}{2}$

- C.405 Calcular os comprimentos dos lados de um triângulo isósceles conhecendo c (raio de circunferência inscrita) e c' (raio da circunferência ex-inscrita á base do triângulo).
- C.406 Demonstrar que é retàngulo todo triângulo no qual o raio de um círculo ex-inscrito é igual à soma dos raios dos outros dois ex-inscritos com o raio do inscrito.
- C.407 Qual é a condição que os lados de um triângulo devem satisfazer para que o raio da circunferência circunscrita seja o triplo do raio da inscrita?

C.408 Sendo r ó raio do círculo inscrito a um triângulo e α , β , γ as distâncias do incentro aos vértices A, B, C respectivamente, demonstrar que:

$$\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{r} = \frac{ab}{2r}$$

C.409 Dados dois triàngulos ABC e A'B'C' nos quais $\widehat{A} + \widehat{A}' = \pi$ e $\widehat{B} = \widehat{B}'$ demonstrar que aa' = bb' + cc'.

C.410 Provar que em todo triángulo valem as seguintes relações:

1)
$$S = \frac{1}{4} (a^2 + \sin 2\hat{B} + b^2 + \sin 2\hat{A})$$

11) $S = \frac{(a^2 - b^2) + \sin \hat{A} + \sin \hat{B}}{2 + \sin (\hat{A} - \hat{B})}$ $(\hat{A} \neq \hat{B})$
111) $(b - c) + \cot \frac{\hat{A}}{2} + (c - a) + \cot \frac{\hat{B}}{2} + (a - b) + \cot \frac{\hat{C}}{2} = 0$

IV)
$$(b^2 - a^2) \cdot \cot g \hat{A} + (c^2 - a^2) \cdot \cot g \hat{B} + (a^2 - b^2) \cdot \cot g \hat{C} = 0$$

 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \neq \frac{\pi}{2})$

V) tg
$$\frac{\widehat{A}}{2}$$
 · tg $\frac{\widehat{B}}{2}$ · tg $\frac{\widehat{C}}{2} = \frac{r}{p}$
VI) tg $\frac{\widehat{A}}{2}$ + tg $\frac{\widehat{B}}{2}$ + tg $\frac{\widehat{C}}{2} = \frac{4R + r}{p}$

VIII) sen
$$\frac{\hat{A}}{2}$$
 · sen $\frac{\hat{B}}{2}$ · sen $\frac{\hat{C}}{2}$ = $\frac{r}{4R}$
VIII) cos \hat{A} + cos \hat{B} + cos \hat{C} = 1 + $\frac{r}{2}$

IX)
$$a \cdot \cos \hat{A} + b \cdot \cos \hat{B} + c \cdot \cos \hat{C} = \frac{2pr}{2}$$

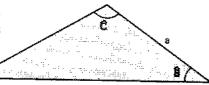
III. RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS QUAISQUER

135. Resolver um triângulo qualquer significa calcular seus elementos principais: a, b, c, \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} . Para isso é necessário que sejam dadas três informações sobre o triângulo, sendo uma delas, pelo menos, a medida de um segmento ligado ao triângulo (lado, altura, mediana, etc).

Há quatro problemas clássicos de resolução de triângulos que trataremos com destaque.

136. 10 problema

Resolver um triângulo conhecendo um lado (a) e os dois ângulos adjacentes a ele $(\hat{B} \in \hat{C})$.



Solução

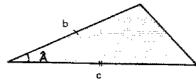
$$\widehat{A} = 180^{\circ} - (\widehat{B} + \widehat{C}),$$

$$b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}}{\operatorname{sen} \widehat{A}},$$

$$c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A}},$$

137. 2º problema

Resolver um triângulo conhecendo dois lados (b e c) e o ângulo que eles formam (\hat{A}) .



Solução

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \implies \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \implies \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

138. 3º problema

Resolver um triângulo conhecendo os três lados (a, b, c).

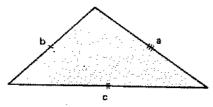


Da lei dos cossenos, vêm:

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Notemos que o problema só tem solução se estes cossenos ficarem no intervalo]-1, +1[, isto é, se:

$$a < b + c$$
, $b < a + c$ e $c < a + b$.

139. 4º problema

Resolver um triângulo conhecendo dois lados (a e b) e o ângulo oposto a um deles (\widehat{A})



Solução

$$sen \widehat{B} = \frac{b}{a} \cdot sen \widehat{A}$$

$$\widehat{C} = 180^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{B})$$

$$c = \frac{a \cdot sen C}{sen \widehat{A}}$$

Discussão

10 caso:
$$b \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} > a$$

Então $\frac{b \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \operatorname{sen} \widehat{B} > 1 \implies \nexists \operatorname{solução}$

20 caso: $b \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} = a$

Então $\frac{b \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \operatorname{sen} \widehat{B} = 1 \implies \widehat{B} = 90^{\circ}$

portanto, existe solução somente se $\hat{A} < 90^{\circ}$, caso contrário $\hat{A} + \hat{B} > 180^{\circ}$.

$$3^o$$
 caso: $b \cdot sen \hat{A} \le a$

Então $\frac{b \cdot \text{sen } \widehat{A}}{a} = \text{sen } \widehat{B} < 1$ e existem dois ângulos \widehat{B}_1 e \widehat{B}_2 , suplementares, que satisfazem a relação sen $\widehat{B} = \frac{b \cdot \text{sen } \widehat{A}}{a}$. Admitamos $0^\circ < B_1 \le 90^\circ$ e $90^\circ \le \widehat{B}_2 < 180^\circ$. Os ângulos \widehat{B}_1 ou \widehat{B}_2 servem como solução dependendo de \widehat{A} . Há três possibilidades.

$$1^{a}$$
) $A = 90^{\circ}$

Neste caso só \hat{B}_1 é solução pois $\hat{A} + \hat{B}_2 \ge 180^\circ$

Neste caso \hat{B}_1 é uma solução porém \hat{B}_2 só é solução se a < b, uma vez que:

$$\hat{B}_2 > \hat{A} \implies b > a$$
.

Neste caso \hat{B}_2 não é solução pois $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180^\circ$; quanto a \hat{B}_1 , só é solução se a > b, uma vez que:

$$\hat{B}_1 < \hat{A} \implies b < a$$

EXERCÍCIOS

- C.411 Resolver um triângulo ABC sabendo que a, b e c são números inteiros consecutivos e Ĉ = 2Ã.
- C.412 Resolver um triângulo retângulo ABC, sabendo que a = 5 e r = 1.
- C.413 Resolver o triângulo A'B'C' cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC dado: $\widehat{A}' = 180^\circ 2\widehat{A}$, $\widehat{B}' = 180^\circ 2\widehat{B}$, $\widehat{C}' = 180^\circ 2\widehat{C}$.
- C.414 Resolver o triângulo A'B'C' cujos vértices são os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do triángulo ABC dado.
- **C.415** Resolver um triângulo ABC sabendo que a = 3, b + c = 10 e $\widehat{A} = \arcsin \frac{3\sqrt{91}}{50}$
- C.416 Resolver um triángulo ABC sabendo que b+c=11, $h_a=4$ e $\widetilde{A}=\arcsin\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$
- C.417 Resolver um triángulo ABC sabendo que $\hat{A} = 45^{\circ}$, b = 3 e a + c = $\frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}$
- C.418 Resolver um triângulo ABC admitindo conhecidos B, C e S.
- C.419 Resolver um triángulo ABC admitindo conhecidos B, Ĉ e ha-

RESPOSTAS

CAPITULO I

C.2 a)
$$\frac{7\pi}{6}$$
 rad b) $\frac{4\pi}{3}$ rad c) $\frac{3\pi}{2}$ rad d) $\frac{5\pi}{3}$ rad e) $\frac{7\pi}{4}$ rad f) $\frac{11\pi}{6}$ rad C.4 a) 30° b) 45° c) 60° d) 120° e) 135° f) 150° C.9 a = $\frac{11\pi}{12}$ rad e b = $\frac{5\pi}{6}$ rad

C.9 a
$$\frac{11\pi}{6}$$
 rad e b $\frac{5\pi}{6}$ rad

$$\frac{12}{12}$$
 6
C.10 a = 4°, b = 7°, c = 2°

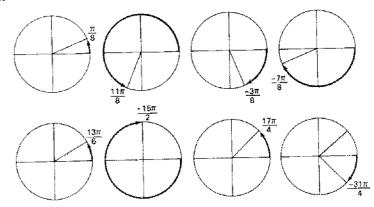
C.13
$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$
 rad ou 120°

C.14
$$\hat{X} = 31.5 \text{ cm}$$

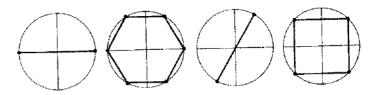
C.16 a) 160°

C.18	}an ×	А	Pı	В	P ₂	A.	Ρ3	₿'	P ₄
	×	0	<u>π</u> 4	7 2	317 4	π	<u>5π</u>	3 <u>#</u>	7#f 4

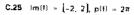
0.20

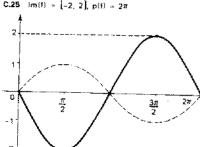


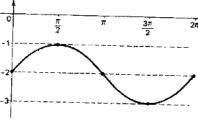
C.22



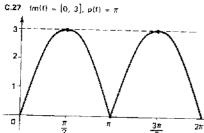
CAPITULO II



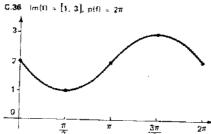




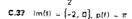
C.35 $|m(t)| = [-1, 3], p(t) = 2\pi$

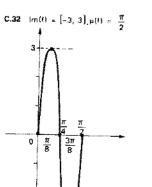


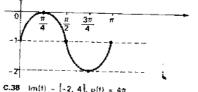
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$
C.31 Im(t) = $[-1, 1], p(t) = 6\pi$

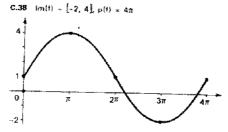


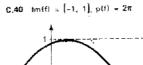


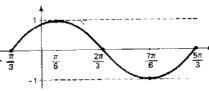




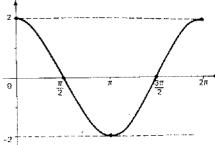


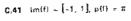


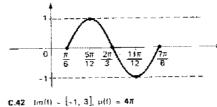


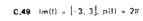




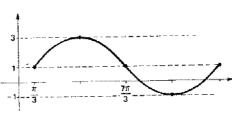


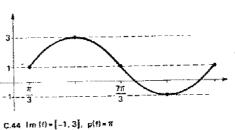


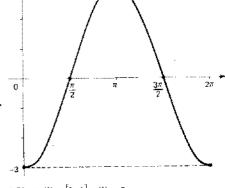


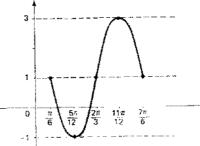


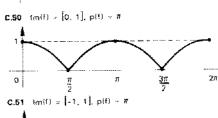
C.48 (mil) = [-2, 2], p(t) = 2#

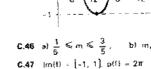


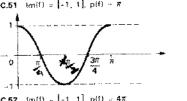


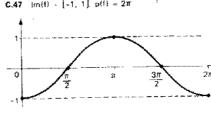


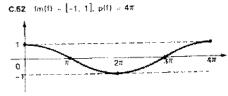


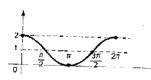




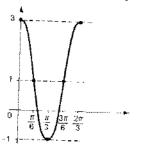








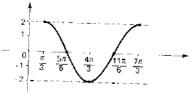
C.54
$$Im(1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} u(1) = \frac{2\pi}{4}$$



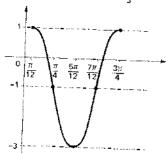
C.55
$$[m(t) : [-1, 1], p(t) = 2\pi$$



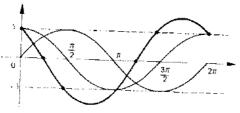
C.56 $[m(f) : [-2, 2], p(f) = 2\pi$



C.57 $Im(i) = [-3, 1], p(i) = \frac{2\pi}{3}$



C.58
$$t \le \frac{1}{3} e_1 \ge 3$$
C.80 $v_1 \ge 0$



C.65 a) D(I) -
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$$

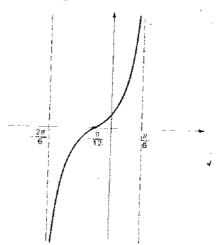
b) D(I) = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$

C.56
$$v_1 > 0, v_2 < 0$$

C.67 $\alpha \le 1$ ou $\alpha \ge 4$

C.69
$$O(1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$p(t) = \frac{\pi}{2}$$



C.70
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

 $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
 $D(h) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$p(0)=\pi,\ p(0)=\pi,\ p(h)=2\pi$$
 C.71 a) m $\lesssim 2$

b)
$$m \leqslant \frac{1}{2}$$
 ou $m \geqslant 1$

$$0.0 \le m < \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{3} < m \le \frac{2}{8}$$

C.72
$$y_1 > 0, y_2 < 0, y_3 < 0$$

CAPITULO III

C.74 sen
$$x = -\frac{24}{25}$$
, $\cos x = \frac{-7}{25}$
 $\tan x = \frac{24}{7}$, $\cot y = \frac{7}{24}$ $\sec x = -\frac{25}{7}$

C.76
$$\cos x * \pm \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$$

C.77
$$\sec x = \pm \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}$$

C.81
$$y = \frac{467}{8}$$

C.83 cos x =
$$\frac{1}{2}$$
 sen x = $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

C.84 tg x = -2 ou tg x =
$$-\frac{1}{2}$$

$$0.90 \text{ a}^3 - 2b = 1$$

C.92
$$y = \frac{a}{2} (3 - a^2)$$

k)
$$\cos - \frac{4\pi}{3}$$
 w -sen $\frac{\pi}{6}$
i) $tgi - \frac{11\pi}{3}$) = $\cot g \frac{\pi}{6}$
C.121 a) sen x b) $\cdot \cot g^2 x$
d) -tg x d) $\cot g x$
C.122 $\cot^2 x$
C.123 $-\sec^2 x$
C.124 t
C.125

CAPITULO IV

c) tg 290° = -tg
$$\frac{7}{6}$$

d) cotg $\frac{7\pi}{6}$ = cotg $\frac{\pi}{6}$

f) cossec
$$\frac{23\pi}{6}$$
 = -cossec $\frac{\pi}{6}$

g)
$$\operatorname{sen}(-\frac{7\pi}{6}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})$$

h) $\operatorname{cos}(-\frac{5\pi}{2}) = \operatorname{cos}(\frac{\pi}{2})$

i)
$$tg(-\frac{3\pi}{3}) = tg(\frac{\pi}{4})$$

$$) \quad \sin \frac{21\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4}$$

$$k) \cos \frac{31\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$$

1)
$$-tg = -tg = -tg = \frac{\pi}{3}$$

d) sen
$$\frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{6}$$

e)
$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$tg = \frac{5\pi}{3} = -\cot g = \frac{\pi}{6}$$

h)
$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{4}$$

i) tg
$$\frac{11\pi}{6}$$
 = -tg $\frac{\pi}{6}$

j) sení-
$$\frac{5\pi}{3}$$
) * cos $\frac{\pi}{6}$

C.127 sen
$$\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$
, $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ ty $\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

C,130 sen 930° =
$$-\frac{1}{2}$$
, cos 930° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg 930° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, cotg 930° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sec 930^\circ = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$
, cossec x = -2

CAPITULO VI

C.132 cotg
$$165^{\circ} = -\{2 + \sqrt{3}\}\$$

sec $255^{\circ} = \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})\$
cossec $15^{\circ} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

$$0.133 \frac{1}{3}$$

$$0.134 \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

C. 137 sen(x + y)
$$=$$
 $-\frac{84}{85}$

$$\cos(x + y) = \frac{13}{85}$$

$$ty(x + y) = -\frac{84}{13}$$

C.145 D(f) = iR, p(f) =
$$\frac{\pi}{2}$$
, im(f) = [-1, 1]

$$O(g) = 17, p(g) = 27, tm(g) = [-2, 2]$$

$$D(h) = \left\{ x \in [R] \mid x \neq \frac{\pi}{4} \rightarrow k\pi \right\}$$

C.146
$$p(f) = \frac{\pi}{3}$$

C.148 $\frac{2}{3}$

C.150 s) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$

C.162 sen $3x = \frac{-44}{125}$

C.163 $\frac{2035}{2197}$

C.164 tg $3x = -\frac{5\sqrt{7}}{9}$

C.165 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.165 $y = -\frac{\pi}{2}$

C.165 $y = \frac{\pi}{2}$

C.166 $p(f) = \pi$

D(f) = $\frac{\pi}{2}$

D(g) = $\frac{\pi}{2}$

D(h) = $\frac{\pi}{2}$

D(h) = $\frac{\pi}{2}$

D(h) = $\frac{\pi}{2}$

C.164 sen $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tg $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$

C.165 sen $\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}}{20}$

tg $\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}}{\sqrt{10 + 7\sqrt{2}}}$

C.166 tg $(\frac{\pi + x}{2}) = +\sqrt{\frac{5}{2}}$

C.168 f(x) =
$$|tg|x|$$
, $|m(f)| = |H|$.

$$D(f) = \{x \in |H| | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}, p(f) = \pi$$
C.169 $D(f) = |H|, p(f) = \frac{\pi}{4}, |lm(f)| = \{0, \sqrt{2}\}$
C.174 a) $2 + \sin b + \cos a + c$
b) $2 + \cos (a + b) + \cos b$
c) $4 + \cos r + \cos \frac{r}{2} + \sin \frac{2a + 3r}{2}$
d) $4 + \cos b + \cos \frac{b}{2} + \cos \frac{2a + 3b}{2}$
e) $\sin (p + q) + \sin (q - p)$
f) $\sin (p + q) + \sin (p - q)$
g) $\cos (p + q) + \cos (p - q)$
h) $\cot (b - a)$
i) $tg(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}) + \cos g(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2})$
C.175 $\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$
C.178 a) $y = -\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$
b) $y = -\frac{1}{4}$
C.183 $D(f) = |H|$

 $Im(f) = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$

CAPITULO VII

C.195 a)
$$S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{6\pi}{7} + 2k\pi \}$$

b) $S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \}$
c) $S = \{x \in |R| | x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \}$
d) $S = \{x \in |R| | x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \}$
e) $S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \}$
f) $S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \}$
g) $S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \}$
h) $S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \}$
i) $S = \{x \in |R| | x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \}$
i) $S = \{x \in |R| | x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \}$
i) $S = \{x \in |R| | x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \}$
C.197 $S = \{x \in |R| | x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \}$

C.237 a)
$$S = \{x \in |R| | x = k\pi \text{ ou } x = \frac{k\pi}{3}\}$$
 $S = \{x \in |R| | x = k\pi \text{ ou } x = \frac{k\pi}{3}\}$
 $S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} - a + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} - a + 2k\pi \}$
 $S = \{x \in |R| | x = \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\}$
C.238 $S = \{\pi \in |R| | x = \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\}$
C.239 $S = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{5}, \pi\}$
C.240 $S = \{x \in |R| | x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$
C.241 b) $S = \{\pi \in |R| | x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$
C.242 $S = S = S = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} +$

C.282
$$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{9} \le x \le \frac{7\pi}{9}\}$$

$$\frac{8\pi}{9} \le x \le \frac{13\pi}{9}.$$

$$\frac{14\pi}{9} \le x \le 2\pi \text{ ou } 0 \le x \le \frac{\pi}{9}.$$
C.283 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} \le x \le \frac{5\pi}{12} \text{ e } x \ne \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{13\pi}{12} \le x \le \frac{17\pi}{12} \text{ e } x \ne \frac{5\pi}{4} \}$
C.284 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6} \}$
C.285 a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \}$
C.287 $2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
Ou
$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi$$
C.288 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \}$

C.289 $\{x \in R \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{6\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou} $	C.315 $\{x \in R \mid \frac{\pi}{3} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ see}$
$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$	ou $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$
C.290 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou} \}$	C.317 $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ on $\pi \le x < \frac{5\pi}{4}$ ou
$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \}$	$\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$ ou
C.291 S = Ø	$\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2\pi$
C.293 $\{x \in \mathbb{R}\}$ $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou	C.318 0 $\leq x \leq \frac{\pi}{8}$ ou $\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{8}$ ou
$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi $	$\frac{3\pi}{8} \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{8} \text{ ou } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{8}$
C.294 $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ su} \}$	C.319 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x \le \frac{7\pi}{6} \text{ ou }$
$x = 2k\pi$ $c.296 \{x \in \Re \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi \right\} $	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ ou
c.298 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} \le x \le \frac{11\pi}{12} \text{ ov } \frac{13\pi}{12} \le x \le \frac{23\pi}{12} $	<u> </u>
C.299 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3} \text{ ou }$	C.320 S = $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \}$
$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ ou	, ,
$\frac{11\pi}{6} < x \le 2\pi$	CAPÍTULO IX
c.301 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \pi\}$	6.322 x = $\frac{60}{13}$, y = $\frac{25}{13}$, z = $\frac{144}{13}$, t = 13
$0.302 \left(x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < \frac{\pi}{4} \text{ or } \frac{3\pi}{4} < x \le \pi \right)$	C.322 $\alpha^2 = \frac{13}{13}$, $\gamma = \frac{1}{13}$, $\gamma =$
$C.303 \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \right\}$	$\alpha^2 + \delta^2 + \omega^2$
C.305 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6} \text{ ou }$	C.324 39
$\frac{3\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{6}$	C.327 h = 8 ou h = 2
c.306 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\}$	C.328 5 C.339 12
"	C.330 R $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ C.332 a $\times \frac{16\sqrt{3}}{3}$, b = $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ c $\times 8$
$\begin{array}{c} \text{c.307 s) } \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \middle \frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{6} \right\} \end{array}$	c.333 a < 16, b = $\frac{16}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$, c = $\frac{16}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$
b) $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < \alpha \leq \frac{5\pi}{6} \}$	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
C.308 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\}$	C.335 erc : $9\sqrt{\frac{5}{7}}$ e erc ty $\sqrt{\frac{7}{5}}$
c.309 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \}$	C.336 A ₀ 8 ₀ · cossec ² θ
C.310 a) $S + \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \}$	C.337 arc tg. $\frac{4}{3}$ C.339 2 $\sqrt{37}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \}$	c.340 8 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C.312 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \}$	C.341 2 • arc sen 4/5
C.313 $\{x \in \Re \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi \}$	C.342 B = 26°34'
C.314 $\{x \in \Re \mid 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ or }$	C.343 C = $\frac{1}{2}$ arc sen $\frac{4}{3\sqrt{3}}$
$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou}$	C.344 $\hat{B} \times 2 \cdot \text{arc tg} (\sqrt{2} - 1)$ a a $\times 2 \sqrt{2}$ C.345 arc sen: $\frac{5}{13}$ e arc sen: $\frac{12}{13}$
5η + 2kη < x < 2η + 2kη}	13 13 C.347 h = 3 $\sqrt{8}$ m
•	

C,348 h = d(tg \$ - tg 0d
C.349 H = h $\left[\frac{tg\beta}{tg\alpha} + 1\right]$
C.350 1233 m
C,351 x = 40 m e y × 90 m
C.363 $\hat{\mathbf{E}} \times 60^{\circ}$, $\hat{\mathbf{C}} = 30^{\circ}$, $\mathbf{a} = 2\sqrt{3}$ e c $\times \sqrt{3}$
C.354 a × 13, b = 5, c × 12, 8 × arc sen = 13
Ĉ ≃ aic sen 12 13
c ,355 $\hat{\mathbf{B}} = 36^\circ$, $\hat{\mathbf{C}} = 60^\circ$, $\mathbf{b} = 2$, $\mathbf{c} = 2\sqrt{3}$
C.356 a = 2, b = c = $\sqrt{2}$, $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$
C.357 a = 14, b = c = 25, $\hat{A} \times 2$ arc sen $\frac{7}{25}$.
$\widehat{B} = \widehat{C} + \operatorname{arc} \cos \frac{7}{25}$

$$\hat{B} = arc \ sen \ \frac{12}{13}$$
, $\hat{C} = arc \ sen \ \frac{5}{13}$
C.369 $a = 4$, $b = c = 2\sqrt{2}$, $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{2}$

C.358 a * 13, b = 12, c = 5

CAPITULO X

C.361 c =
$$\sqrt{10}$$

C.362 4 $\sqrt{19}$ m \Rightarrow 4 $\sqrt{7}$ m
C.363 arc sen $\frac{5}{2\sqrt{41-20\sqrt{3}}}$
C.365 \hat{A} = 45°, \hat{B} = 60° = \hat{C} = 75°
C.366 \hat{B} = arc cos $\frac{57}{90}$
C.369 c = $\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$
C.370 7 $\sqrt{2}$, 2 $\sqrt{29}$, $\sqrt{130}$
C.373 a) retangulo b) obtualingulo ci ecutiongulo ci ecutiongulo

C.393
$$h_a(tg \ \alpha + 1g \ \beta)$$

C.394 $S = 7 \sqrt{3} \ m^2$
C.395 $(2 + \sqrt{12}) \ cm^2$
C.395 $50 \sqrt{3} \ m^2$
C.397 $2 \sqrt{4t - 20} \sqrt{3} \ m$
C.398 a) $\frac{ab}{2}$
b) $\theta = 90^{\circ}$ c) 73%
C.400 alturas: $\frac{3\sqrt{15}}{2}, \sqrt{t5}, \frac{3\sqrt{15}}{2}$

medianas: $\sqrt{46}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{10}$

C.401 m₈ = $\frac{\sqrt{145}}{2}$ arc cos $\frac{26}{10.\sqrt{145}}$

C.403 r = 3 e R = 9

bissetrizes: $\frac{12\sqrt{15}}{7}$, $2\sqrt{6}$, $\frac{8\sqrt{6}}{5}$ instrita: $\frac{\sqrt{15}}{3}$, circunsorita: $\frac{16\sqrt{15}}{15}$

C.405 a = 2 $\sqrt{r'+1}$ e b = E = $\frac{(r'+r)\sqrt{r+r'}}{(r'+r)}$

e \widehat{C} = arc cos $\frac{3}{5}$ C.413 a' = \widehat{R} · sen $2\widehat{A}$ · b' = \widehat{R} · sen $2\widehat{B}$, c' = \widehat{R} · sen $2\widehat{C}$ \widehat{C} · \widehat{B} · \widehat{C} · \widehat{B} · \widehat{A} · \widehat{C} · \widehat{C} · = $\frac{\widehat{B} + \widehat{A}}{2}$, \widehat{C} · $\widehat{$

 $a' \approx 2(p-a) \cdot sen \frac{\widehat{A}}{2}, b' \approx 2(p-b) \cdot sen \frac{\widehat{B}}{2}$

C.415 b = c = 5, $\widehat{\theta}$ = \widehat{C} = $\frac{\pi}{2}$ = $\frac{1}{2}$ + arc sen $\frac{3\sqrt{91}}{40}$

6.417 s = $3\sqrt{2}$, c = $\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$, $\hat{\mathbf{g}} = 30^{\circ}$, $\hat{\mathbf{c}} = 115^{\circ}$

 $r = \mathbf{R} \cdot \cos \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{180}^{\circ} + (\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{C}})$, and

A = 3 + con(B + C) + sea B + sea C

C.419 a = hg(tg B + tg C). b = hg c , c - ha

s â .. 180° ~ (B + C)

 $\hat{\mathbf{B}} = \operatorname{arc\ cos}\ \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\hat{\mathbf{C}} = \operatorname{arc\ cos}\ \frac{3}{5}$

C418 a = R · sen $(\widehat{B} + \widehat{C})$, b = R · sen \widehat{B} ,

C.411 a = 4, b = 5, c = 6, \widehat{A} = arc cos $\frac{3}{2}$

8 = 180° - 3A. C = 2A C.412 b = 3, c × 4, B = arc sen 3

e c' = 2(p - c) + sen C

 $0.416 \times 3 + \sqrt{20}$, 0 = 5, c = 6

TESTES

FUNÇÕES

- TC.1 (ITA-72) O ángulo convexo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos ás 10 horas e 15 minutos é:
 - a) 142°30'

b) 142°40'

c) 142°

- d) 141°30
- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.2 (FUVEST-77) O àngulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:
 - a) 27°
- b) 30°
- c) 36°
- e) 72°
- TC.3/ (ITA-73) Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em angulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão
 - a) $4 h 5 \frac{2}{11}$ min e $4 h 38 \frac{5}{11}$ min b) $4 h 5 \frac{5}{11}$ min e $4 h 38 \frac{2}{11}$ min
- - c) $4h5\frac{5}{11}$ min e $4h38\frac{5}{12}$ min d) $4h5\frac{3}{11}$ min e $4h38\frac{7}{11}$ min
 - e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.4 (PUC-70) Sendo θ um ângulo positivo, então $(\frac{5\pi}{2} \theta)$ pertence ao:
 - a) 10 quadrante

b) 20 quadrante

c) 30 quadrante

- d) 40 quadrante
- e) nenhuma das alternativas anteriores.
- TC.5 (UDESC-74) Os arcos cujo cosseno é $\sqrt{2}$ podem estar nos quadrantes:
 - a) 19 e 49
- b) 10 e 20
- c) 19 e 39
- d) 20 e 30

- e) nenhuma das opções é correta.
- TC.6 (PUC-76) Todos os valores de x, de modo que a expressão sen $\theta = \frac{2x-1}{3}$ exista, b) $-1 < x \le 0$ c) $-1 \le x \le 2$
 - al $-1 \le x \le 1$

- d) $-1 \le x \le \frac{1}{2}$
- $e) -1 \le x < \frac{1}{2}$

C.392 b) sen $\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

c) α ≈ 38° t0'22"

TC.7 (MACK-73) O conjunto dos números reais a para os quais a equação sen x = e + a-1 tem solução real em x é:

a) #R

c) {1, -1, 0}

d) {kπ | k inteiro}

b) Øe) nenhuma das anteriores.

TC.8 (CESCEM-77) Se $x \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$ e $\cos x = 2k - 1$; então, k varia no intervalo

a) $\{-1; 0\}$ b) [-1; 0] c) $\{0; \frac{1}{2}\}$ d) $\{0; 1\}$ e) $\{\frac{1}{2}; 1\}$

TC.9 (PUC-75) O valor numérico da expressão:

 $y = \cos 4x + \sin 2x + \tan 2x - \sec 8x$ para $x = \frac{\pi}{2}$ é:

a) 2

b) 1

c) 3

d) 0

TC.10 (CESCEM-75) O menor valor que assume a expressão (6 - sen x); para "x" variando de 0º a 360º é:

a) 7

b) 6

∞6 5

d) 1

TC.11 (MACK-76) O valor máximo de $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, é:

a) 1.5

b) 2

c) 2.5

d) 3

TC.12 (CESCEA-73) Assinale a afirmação verdadeira:

- a) Para todo a real, existe x real tal que tg x = a
- b) Existe x real tal que sen x = a ← a ≤ t
- c) Existe x real tal que sec x = a la | 4
- d) não sei

TC.13 (CESCEM-72) Os quadrantes onde estão os ângulos α , β e γ tais que:

 $sen \alpha < 0$ e $cos \alpha < 0$

 $\cos \beta < 0$ e $\tan \beta < 0$

sen $\gamma > 0$ e coto $\gamma > 0$ são respectivamente:

a) 30, 20, 10 b) 20, 10, 30 c) 30, 10, 20 d) 10, 20, 30 e) 30, 20, 20

TC.14 (SANTA CASA-77) Se $F(x) = \cos x$, então:

a)
$$F(\frac{\pi}{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2}) < F(1,5)$$

b)
$$F(1,5) < F(\frac{\pi}{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2})$$

c)
$$F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2}) < F(1,5) < F(\frac{\pi}{2})$$

d)
$$F(\sqrt{2}) < F(1,5) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\frac{\pi}{2})$$

e)
$$F(\frac{\pi}{2}) < F(1,5) < F(\sqrt{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

TC.15 (CESCEM-70) Assinalar a desigualdade verdadeira para todo x:

a) |cos x | + |sen x | ≥ 1

b) |cos x - sen x | \left| |cos x | + | |sen x |

c) ta x ≥ cos x

d) |tg x| ≥ |sec x|

e) nenhuma das alternativas anteriores

TC.16 (CESCEM-73) Entre as afirmações abaixo, uma e apenas uma, é verdadeira. Assinale a:

- a) O seno e o cosseno são funções tais que quando uma cresce a outra decresce
- b) cos x sen x ≥ 0, para todo x real, pois cos x ≥ sen x
- c) tg $\frac{x}{4}$ é periòdica de periodo 2π , pois a tangente è uma função periódica de

d) $1-2\cdot \sin x \cdot \cos x \ge 0$, para todo x real, pois $(\sin x - \cos x)^2 = 1-2 \cdot$ · sen x · cos x

TC.17 (CESCEA-73) Sejam x e y dois números reais tais que $0 \le x \le y \le \frac{\pi}{2}$. Assinale a afirmação falsa:

- a) $2^{tg \times} < 2^{tg \vee}$
- b) cos x < cos y
- c) sen x < sen y
- d) não sei.

TC.18 (GV-70) A função F(x) = sen x • log₁ x 6:

- a) sempre negativa, para $0 < x < \pi$
- b) sempre positiva, para $0 < x < \pi$
- c) positiva para $0 \le x \le 1$ e negativa para $1 \le x \le \pi$
- d) negativa para $0 \le x \le 1$ e positiva para $1 \le x \le \pi$
- e) positiva para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e negativa para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

TC.19 (POLI-68) Se x e y satisfazem $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ e z = sen x - tg y * cos x, então:

- a) para cada y, z é uma função decrescente de x
- b) para cada x, z é uma função decrescente de y
- c) z pode ser nulo
- d) z é sempre positivo
- e) nenhuma das anteriores

TC.20 (CESCEM-73) Considere a seqüência de números reais que se obtém fazendo $x = \frac{2}{\pi + 2n\pi}$ na expressão $y = \sin \frac{1}{x}$, n = 0, 1, 2... Pode se afirmar que:

- a) a sequencia não é convergente
- b) o límite da seqüência situa-se no intervalo fechado [-1; 1]
- c) zero é um termo da seqüência
- d) a sequencia converge para +1 ou para -1
- e) o limite da sequência é zero

TC.21 (FFCLUSP-69) A solução de sen² x + sen⁴ x + sen⁶ x = 3 é:

- a) $x = k \frac{\pi}{2}$ (k um inteiro qualquer)
- b) x = kπ (k um inteiro qualquer)
- c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k um inteiro qualquer)
- d) $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ (k um inteiro qualquer)
- e) nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.

TC.22 (CESCEM-73) Considere a equação trigonométrica sen x + sen 2x = 2. Então:

- a) existem soluções todas irracionais
- b) existem soluções todas racionais
- c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
- d) não existe x que satisfaça a equação
- $e \times = 0$

TC.23 (CESCEA-72) Seja A \subseteq B = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\pi\}$ o domínio de função f, deda por: $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$. Então, A é igual a:

- a) $\{x \in B \mid x \neq \frac{\pi}{2} \in x \neq 0\}$
- b) $\{x \in B \mid x \neq \pi\}$
- ·c) $\{x \in B \mid x \neq \frac{3\pi}{2}\}$
- d) $\{x \in B \mid x = \frac{3\pi}{2}\}$
- e) não sei

TC.24 (GV-74) Seja n o número de pontos do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\pi\}$ nos quais tg x sen 4x não está definida. Então n é igual a:

- a) 3
- b) 4

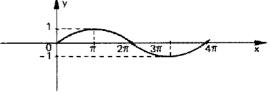
TC.25 (CESCEA-75) Assinatar a afirmação correta:

- a) a função tangente está definida para todo x real, é sempre crescente e tem
- b) a função cotangente está definida para todo x real, diferente de $\frac{\pi}{2}$ + $k\pi$, com k inteiro, é sempre crescente e tem período #.
- c) a função cossecante está definida para todo x real, diferente de kπ, com k intejro # tem valores no intervalo [1, +col.
- d) a função seno está definida para todo x real e é sempre crescente.
- e) a função secante está definida para todo x real, diferente de $\frac{\pi}{2}$ + $k\pi$, com k înteiro relativo e term valores no conjunto $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

- TC.26 (CESCEM-71) Qual dos seguintes conjuntos de valores de x poderia constituir um domínio para a função log sen x?
 - a) $x \leq 0$
- b) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ c) $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
- d) $x \neq K$. $\frac{3\pi}{4}$ $\{K = 0, 1, 2, ...\}$ e) $x \neq K$. $\frac{\pi}{2}$ $\{K = 0, 1, 2, ...\}$

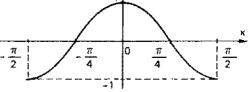
TC.27 (CESCEM-75) A função que melhor se adapta ao gráfico abaixo é:

- a) $y = sen \frac{x}{2}$
- b) $y = \cos \frac{x}{2}$
- c) y = sen 2x
- d) $v = \cos 2x$
- e) y = sen x



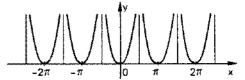
TC.28 (CESCEA-73) A figura é um esboço do gráfico de função:

- a) $y = \cos x$, $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- b) $y = \cos 2x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- c) y = sen 2x, $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}$



TC.29 (CESCEM-73) Qual das funções abaixo melhor se adapta ao gráfico?

- a) $v = x^2$
- b) v = sen x
- c) y = sec x 1 d) $y = |\cos x|$
- e) v = |tax| + 1



TC.30 (MACK-77) O gráfico abeixo pode ser da função:

- a) san x
- b) sen2 x
- c) 1 |sen x |
- d) 1 |cos x | e) Não sei

- TC.31 (GV-74) As equações abaixo representam curvas, num sistema cartesiano de coordenadas de eixos x e y. Só uma destas curvas não passa pelo ponto x = -0.5; y = 2;
 - a) $y = \log_2 (\frac{1}{16})^x$ b) $y = 8x^2$
 - c) $y = -\frac{\sin{(\pi x)}}{0.5}$ d) $y = 1\frac{1}{x}$
 - e) v ≈ e^X

TC.32 (EESCUSP-69) O período da função 3 cos 4x é

- a) a) $\frac{\pi}{9}$
- b) 377
- c) $\frac{2\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{2}$

TC.33 (EAESP-GV-77) O período da função dada por y = 3 sen $(2\pi x + \frac{\pi}{2})$ é:

- ы) <u>п</u>
- c) 2m

TC.34 (STA CASA-73) Em relação a função $y = 2 sen x + 3 cos \frac{x}{2}$ pode-se afirmar:

- a) $y(x) = y(x + 2\pi)$ b) não é periódica c) é tal que $y(x) = y(x + \frac{\pi}{2})$
- d) é harmônica simples

e) è tal que $y(x) = y(x + 4\pi)$

TC.35 (CESCEA-74) O domínio, a imagem e o período da função $f(x) = tg(x - \frac{\pi}{A})$ são, respectivamente:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{s} k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, Re π
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R} \in 2\pi$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \}$, $\mathbb{R} \in \pi$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$, $\mathbb{R} \in 2\pi$
- el não sei

TC.36 (CESCEM-73) Uma reta pela origem, de coeficiente angular negativo, tem três e somente três pontos em comum com o gráfico da função y = sen x. A menor des três correspondentes abscissas:

- a) é um múltiplo de #
- b) está entre = 3π e -π

d) está entre -2π e -3π

e) é positiva

TC.37 (MACK-74) A intersecção dos gráficos das funções seno e tangente para $0 \le x \le \pi$

- a) é vazia b) contém um e um só ponto
- e) contém o ponto de abscissa #

d) contém mais de um ponto

e) depende da escala usada

TC.38 (CESCEA-75) Dadas as curvas $y = x^2$ e $y = \cos x$, assinalar dentre as afirmeções abaixo, a verdadeira:

- a) elas não se interceptam
- b) elas se interceptam numa infinidade de pontos
- c) elas se interceptam em dois pontos
- d) elas se interceptam num único ponto
- e) elas se interceptam em três pontos

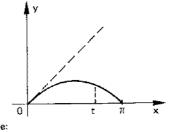
TC.39 (MACK-75) O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g dadas

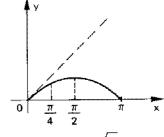
$$f(x) = -|\cos x|$$
 e $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ com $-\pi < x < \pi$, és

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) major que 3

TC.40 (FAAP-74) Para cade $t \in [0, \pi]$, $A(t) = 1 - \cos t$, represente a área sob o gráfico de f (acima do eixo dos x) dade por f(x) = sen x (vide figura 1). Baseado nisso,

a área sob o gráfico de f (acima do eixo dos x) com $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (vide figura 2)





a)
$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

b)
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e)
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTAIS

TC.41 (PUC-75) O valor da expressão $25 \cdot \text{sen}^2 \times -9 \cdot \text{tg}^2 \times \text{sabendo qua cossec} \times = \frac{5}{4}$ e x é do primeiro quadrante é:

- a) 2
- b) 3
- d) 0
- e) 1

TC.42 (GV-76) Se sen a = $\frac{24}{25}$ e sec a é negativa, então o valor de $\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

TC.43 (ITA-74) O valor da expressão $x = \frac{2 + tg \theta}{1 - t e^2 \theta}$ quando $\cos \theta = -\frac{3}{7} e tg \theta < 0$, 4:

- a) $\frac{4\sqrt{10}}{35}$
- b) $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$
- c) $\frac{2\sqrt{10}}{4\pi}$

d) 3 $\sqrt{10}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.44 (CESCEA-70) Se sen $x = \frac{n-1}{p}$, então, $\frac{tg^2x+1}{\cot^4x+1}$ é igual a:

- a) $\frac{(n-1)^2}{2n-1}$ b) $\frac{n^2}{2n-1}$ c) $\frac{n-1}{(n+1)^2}$ d) $\frac{n-1}{(2n+1)^2}$ e) $\frac{(n-1)^2}{2n+1}$

- TC.45 (CESCEM-76) Sabe-se que sen $x = a \neq 0$ e $\cos x = b \neq 0$. Logo, $\tan x + \cot x = a \neq 0$

- a) $\frac{a+b}{a+b}$ b) $\frac{ab}{a+b}$ c) $\frac{ab}{a^2+b^2}$ e) $\frac{1}{ab}$ e) $\frac{1}{a^2+b^2}$
- TC.45 (MACK-73) As raízes da equação $2x^2 px 1 = 0$ são sen θ e cos θ , sendo 0 um número real. O valor de p é:
- b) 2
- d) 5
- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.47 (ITA-71) Seja $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Qual afirmação abaixo é verdadeira?

a)
$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \le 1$$

a)
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \le 1$$
 b) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \le 2$

c)
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} \ge 2$$

c)
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \ge 2$$
 d) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$

- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.48 (CESCEA 72) Assinate a afirmação falsa:
 - a) $\{x \in \mathbb{R} \mid sen^2x + cos^2x = 1\} = \mathbb{R}$
 - b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \cdot \sin^2(3x) + 2 \cdot \cos^2(3x) = 6\} = \emptyset$
 - c) $\{x \in \mathbb{R} \mid sen^4x + cos^4x = 1\} = \mathbb{R}$
 - d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sec^2 x > \tan^2 x + 1\} = \emptyset$
 - e) não sei
- TC.49 (CESCEM-70) Se $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k inteiro, então $\frac{\cos^2 \theta}{1 \cos \theta}$ é igual a:
- b) $sen \theta \cdot cos \theta$ c) $1 + cos \theta$ d) $1 + sen \theta$
- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.50 (PUC-70) A expressão: cossec x sen x é identicamente igual a:

- a) $\cot^3 x$ b) $\sec^2 x$ c) $\tan^2 x + \cos x$ d) $\tan^2 x + \sec x$ e) $\cos^3 x$
- TC.51 (CESCEA-71) A expressão: $\frac{\cos^4 x \sin^4 x}{1 \tan^4 x}$ é equivalente a:
 - a) cos x + sen x b) cos x sen x c) cos x d) sen x e) não sei
- TC.52 (GV-75) A expressão $\frac{\sec n x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sec n x}$ é igual a:

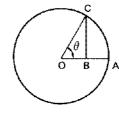
- a) $\frac{2}{\cos x}$ b) $\frac{1}{\sin x}$ c) $\sec x$ d) $2 \csc x$ e) $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$
- TC.53 (CESCEA-73) As raízes da equação: x2 (2 · tg a)x 1 = 0 são
 - a) to a ± cossec a b) to a ± cos a
 - c) tg a ± sec a d) não sei

- TC.54 (ITA-73) Eliminando θ nas equações:
 - $x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta = 2 \cdot a \cdot \sin \theta$ $x \cdot \cos \theta = y \cdot \sin \theta = a \cdot \cos \theta$, a > 0 temos:
 - a) $(x + y)^{3} (x y)^{3} = 2a(x + y)^{2}$ b) $(x + y)^{2} + (x y)^{2} = (x + y)a$
 - (c) $(x + y)^{3} + (x y)^{3} = 2a^{3}$
- d) impossivel eliminar θ
- e) nenhuma das respostas anteriores.
- TC.55 (MACK-76) O valor de k, para o qual

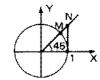
$$(\cos x + \sin x)^2 + k \sin x \cos x - 1 = 0$$

- é uma identidade, é:
- a) -1
- b) ~2
- c) 0
- d) 1
- e) 2

TC.56 (CESGRANRIO-76) Na figura o raio OA do círculo vale 6. O segmento OB vale 3 e o segmento CB é perpendicular a OA. A medida, em radianos, do ângulo 6 é



- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{3\pi}{6}$
- TC.57 (CESCEA-75) Considere a figura ao lado:



O comprimento do segmento MN é:

a)
$$\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$
 b) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $-\sqrt{2} + 1$ d) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2} - 1$

- TC.58 (GV-74) A expressão $\sqrt{\cos \pi + \log_2 16 e^{sen 2\pi}}$ tem o mesmo valor numérico que:
 - a) $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ b) $\cos \frac{\pi}{2}$ c) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ d) $e^{\cos \pi}$

- TC.59 (GV -72) Sabendo-se que $x + y = \frac{\pi}{3}$ e $x y = \frac{\pi}{3}$, então, sen x + sen y é igual a:
 - a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{2}$

- TC.60 (CESCEM-75) O seno de um dos ángulos agudos de um losango é igual a 🗓 portanto a tangente do meior ângulo interno é:

 - a) -1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.61 (FAAP-75) Conhecida a fórmula:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + ... + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\sin(nx) \cdot \cos[(n+1)x]}{2 \cdot \sin x}$$

válida para todo x ∈ IR tal que sen x ≠ 0, então a soma

$$\sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{3\pi}{3} + \dots + \sin^2 9 \frac{\pi}{3}$$
 vale:

b)
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$
 c) $\frac{1}{2}$ d) 9

c)
$$\frac{1}{2}$$

e)
$$\frac{9}{7}$$

TC.62 (CESCEM-74) Dado o ángulo $\alpha = 1782^{\circ}$, então:

a) sen
$$\alpha = -\sin 18^{\circ}$$
, $\cos \alpha = \cos 18^{\circ}$, $\tan \alpha = -\tan 18^{\circ}$

b)
$$\sin \alpha = -\sin 18^\circ$$
, $\cos \alpha = -\cos 18^\circ$, $\tan \alpha = -\tan 18^\circ$

c) sen
$$\alpha = \text{sen } 18^\circ$$
, $\cos \alpha = \cos 18^\circ$, $\tan \alpha = \tan 18^\circ$

d) sen
$$\alpha = \text{sen } 18^\circ$$
, $\cos \alpha = -\cos 18^\circ$, $\tan \alpha = \tan 18^\circ$

e)
$$\sin \alpha = \sin 18^\circ$$
, $\cos \alpha = \cos 18^\circ$, $\tan \alpha = -\tan 18^\circ$

TC.63 (FE1-66) Se $\cos x = \frac{3}{5}$, então $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ é igual a:

$$a$$
 $\frac{3}{5}$

(b)
$$-\frac{3}{5}$$

a)
$$\frac{3}{5}$$
 b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{4}{5}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.64 (MACK-76) Se $x = \frac{\pi}{6}$, o valor de $2\cos\pi sen(\pi - x)sen(\frac{3\pi}{2} + x)$ é igual a:

a)
$$\cos \frac{2\pi}{5}$$

b) -
$$\frac{2\pi}{5}$$

a)
$$\cos \frac{2\pi}{5}$$
 b) $-\frac{2\pi}{5}$ c) $\sin \frac{2\pi}{5}$ d) $-\sin \frac{2\pi}{5}$

e) nenhum dos antériores

TC.65 (GV-75)
$$\frac{\cos(90^{\circ} + x) + \cos(180^{\circ} - x) + \cos(360^{\circ} - x) + 3\cos(90^{\circ} - x)}{\sin(270^{\circ} + x) - \sin(90^{\circ} + x) - \cos(90^{\circ} - x) + \sin(360^{\circ} + x)}$$

é igual a:

- a) cotg x
- b) -tax
- c) -1
- d) 1

e) nenhuma das anteriores

TC.66 (MACK-75) A soma dos 12 primeiros termos da série

$$\cos \alpha$$
, $\cos(\alpha + \pi)$, $\cos(\alpha + 2\pi)$... é:

- a) 6 cos (X
- b) cos a:
- c) 1

TC.67 (FFCLUSP-67) $\log \log 10^{\circ} + \log \log 2^{\circ} + \log \log 3^{\circ} + ... + \log \log 89^{\circ} =$

- a) 0
- b) 1
- c) 44.5
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.68 (PUC-77) Qual das funções abaixo, é função par ?

a)
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
 b) $f(x) = x$ c) $f(x) = x^5$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = senx$

$$\varepsilon$$
) $f(x) = x^5$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

TC.69 (CESCEM-71) Dizemos que uma função real é par se f(x) = f(-x) e que é impar se f(x) = -f(-x). Das afirmativas que seguem indique qual a falsa:

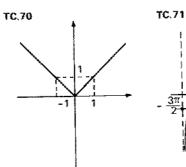
- a) o produto de duas funções impares é uma função impar
- b) o produto de duas funções pares é uma função par
- c) a soma de duas funções (mpares è uma função (mpar
- d) a soma de duas funções pares é uma função par
- el alguma das afirmações anteriores é falsa

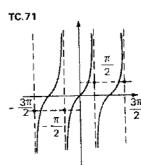
(CESCEA-71) Em cada uma das questões de TC.70 a TC.74 é dado o gráfico de uma função definida em IR. Dadas as denominações:

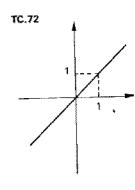
- 1 funcão (mpar:
- 11 função não limitada;
- III função periódica;
- IV função par;
- V função identidade.

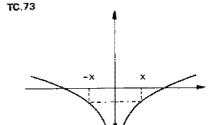
Assinale:

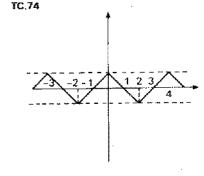
- a) se as denominações I, II e III forem verdadeiras para o gráfico da questão
- b) se as denominações III e IV forem verdadeiras para o gráfico da questão
- c) se as denominações I, II e V forem verdadeiras para o gráfico da questão
- d) se as denominações II a IV forem verdadeiras para o gráfico da questão
- e) não sei











TRANSFORMAÇÕES

TC.75 (CESCEM-73) Sabe-se que tg 75° = 2 + $\sqrt{3}$ e tg 60° = $\sqrt{3}$. O valor de tg 15° a) $\frac{1}{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $2 + \sqrt{3}$ e) $2 - \sqrt{3}$

TC.76 (MACK-75) Se $0 \le a \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le b \le \frac{\pi}{2}$ então:

- a) sen (a + b) < sen a + sen b quaisquer que sejam a e b
- b) sen (a + b) > sen a + sen b quaisquer que sejam a e b
- c) sen (a + b) > sen a + sen b somente se a > b
- d) sen (a + b) < sen a + sen b somente se a < b
- e) nenhuma das anteriores

TC.77 (PUC-71) Para todo x real, sempre vale a relação:

- a) $sen^2 x cos^2 x = -1$

- c) $tg x = \frac{sen x}{cos x}$
- d) $tg \times = 1 + sec^2 \times$
- el cotg x = $\frac{\cos x}{\sec x}$

TC.78 (MACK-74) A expressão:

$$N = sen \alpha \cdot cos \alpha \cdot cos 2\alpha \cdot cos 4\alpha \cdot cos 8\alpha \cdot cos 16\alpha \cdot cos 32\alpha$$

é equivalente a:

- a) $N = \sin 63\alpha$
- b) N = sen 640
- c) $N = \cos 64\alpha$

- d) N = $\frac{\cos 64\alpha}{26}$
- e) $N = \frac{\text{sen } 640}{26}$

TC.79 (FEI-67) O menor período da função f(x) = sen x · cos x è:

- b) 2kπ
- c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.80 (MACK-77) Sejam as funções f₁ e f₂ de dominio IA, definidas por

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$
 e $f_2(x) = 3 \operatorname{sen} x \cos x$.

Sendo I₁ e I₂ os conjuntos-imagem de I₁ e I₂, respectivamente, tem-se que

- c) | | = |2
- d) nenhuma das afirmações acima é correta
- e) Não sei

TC.81 (CESCEM-76) Sabe-se que sen 2x = 2 sen x cos x. Portanto, sen 4x =

- a) 4 sen x cos x
- b) 4 sen 2x cos 2x
- c) 2 sen 2x cos x

- d) 2 sen x cos 2x
- e) 2 sen 2x cos 2x

TC.82 (GV-73) Sendo x um arco de quarto quadrante e sendo sen x = $-\frac{1}{2}$, o valor

- de sen 4x é:

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.83 (CESCEM-70) Se $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$ então o valor de $\cos 4x$ é:

- a) $2\cos^4 x = 1$
- b) $8(\cos^4 x \cos^2 x) + 1$
- c) $4 \cos^2 x 1$
- d) $4\cos^4 x 2\cos^2 x + 1$
- e) nenhuma das alternativas anteriores

TC.84 (CESCEA-77) Sabendo-se que $\cos 2x = \frac{2}{3}$, então o valor de $tg^2 x$ é:

- a) $\frac{11}{5}$ b) 1 c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{1}{5}$

TC.85 (CV-75) Sendo x um arco do primeiro quadrante e sen x = a, a expressão:

- $2\cos^2 x + \sin^2 2x$ é igual a:
- a) $2(1-2a^4)$
- b) $-2(-1 + 2a^2 2a^4)$ d) $4(1 a^2 a^4)$
- c) $2(1-2a^2) + 4a\sqrt{1-a^2}$
- e) nenhuma das anteriores

TC.86 Sabendo que sen a = $\frac{3}{5}$ e cos a = $\frac{4}{5}$, então sen 2a + cos 2a é igual a:

- a) $\frac{14}{5}$ b) $\frac{31}{25}$ c) $\frac{9}{5}$ d) $\frac{17}{25}$ e) $\frac{18}{25}$

TC.87 (CESCEM-77) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = \sin^2 x - 1$. Então, f(x) + g(x) é:

- a) $-\cos^2 x 1$ d) $\sin^2 x$
- b) sen x (2 cos x + sen x) 1

TC.88 (MACK-74) O periodo da função f definida por f(x) = sen4 x é:

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) π d) 2π e) $\sqrt[4]{2\pi}$

TC.89 (MACK-74) O período da função $f(x) = sen^2 3x - cos 4x$ é:

- a) $\frac{\pi}{12}$ b) π c) $\frac{2\pi}{3}$ d) 2π

TC.90 (CESCEA-73) A expressão: $\frac{1g \times}{1 + ta \times} + \frac{tg \times}{1 - ta \times}$ é idêntica a:

- a) sec 2x
- b) ta 2x
- c) to 4x
- d) não sei

TC.91 (CESCEM-73) Seja $f(x) = tg(x + \frac{\pi}{4}) + tg(x - \frac{\pi}{4})$ podemos afirmar que:

- a) f(0) = -1 e $f(\frac{\pi}{4}) = 0$
- b) qualquer que seja x, f(x) está definida e vale -1
- c) se $x = k\pi$, f(x) = -1 e se $x \neq k\pi$, $f(x) \neq -1$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- d) se $x \ge 0$, f(x) = -1
- e) f(x) = -1 nos pontos onde a função estiver definida

TC.92 (MACK-74) Seja $w = tg \alpha + cotg \alpha$ com $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, então:

- a) $w \le 0.5$ b) $-1 \le w \le 1$ d) o major valor de $w \notin 2$ e) $w \ge 2$

TC.93 (EAESP-GV-77) Se tg x = t, então, $\cos 2x + \sin 2x$ é equivalente à:

- a) $\frac{(1-t)^2}{1+t^2}$ b) $\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}$ c) $1+t^2$

- d) $1 + 2t t^2$ e) $\frac{1 + 2t t^2}{1 + t^2}$

TC.94 (MACK-69) Outra forma para a expressão $\frac{3 \cdot \text{sen } 2x}{1 - \text{cns } 2x}$ é:

- a) $\frac{3}{\cot g \times}$ b) $\cot g \times$ c) $\frac{\cot g \times}{1 + \cot^2 x}$ d) $\frac{\cot g \times}{3}$ e) $3 \cdot \cot g \times$

TC.95 (ITA-94) $\left[\frac{1 - \log x}{1 + \log x}\right]^2$ vale:

- a) $\frac{1-2 \cdot \sin 2x}{1+\sin 2x}$ b) $\frac{1+2 \cdot \sin 2x}{1-\sin 2x}$ c) $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

- $\frac{1 \sin 2x}{1 + \sin 2x}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.96 (MACK-76) Se tg x = m e tg 2x = 3m, $m \ge 0$, o ângulo agudo x mede:

- a) 15°
- b) 60°
- c) 45°
- d) 30°
- e) 22°30'

TC.97 (ITA-77) Seja D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \log \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, ...\}$. Com respeito à função $f:D \to \mathbb{R}$, definide por $f(x) = \frac{\sin(3e^X)}{\cos e^X} - \frac{\cos(3e^X)}{\cos e^X}$, podemos afirmar que:

- a) f(x) = 2 para todo x em D
- b) f(x) = 3 para todo x em D
- c) $f(x) = e^3$ para todo x em D
- d) I(x) não è constante em D
- e) nenhuma das anteriores

TC.98 (MACK-74) Sendo u a medida em radianos de um ângulo e $v = \frac{\pi}{4} - u$, a expressão

- $S = \frac{\text{sen } u + \cos u}{\sqrt{2} \cdot \text{sen } u + \cos u}$ em função de $x = \cos v$ è:
- a) $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $\frac{x}{2x^2+1}$ c) $\frac{2x}{1-x^2}$ d) $\frac{2x}{2x^2-1}$ e) $\frac{2x}{x^2+2}$

TC.99 (UNB-74) Para $0 \le \tau \le 2\pi$ a expressão: $\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos t)}$ 6 igual a:

a) $\cos{(\frac{1}{2})}$

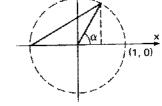
b) $\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|$

c) sen $(\frac{t}{2})$

d) nenhuma das anteriores

TC.100 (MACK-73) Seja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Da figura abaixo pode-se concluir diretamente que:

- a) $tg \frac{\alpha}{3} \neq \frac{tg \alpha}{3}$
- b) $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{sen \alpha}{1 + cos \alpha}$
- c) $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sec \alpha}$
- d) $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{- sen \alpha}{1 cos \alpha}$ e) $tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-sen \alpha}{1+sen \alpha}}$



TC.101 (EESCUSP-68) Se $\cot \frac{3}{2} = \sqrt{3}$ então:

- a) sen a = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) sen a = $\frac{\sqrt{2}}{3}$

- d) sen a = 1
- d) nenhuma das respostas anteriores

TC.102 (CESCEA-69) Se tg $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ então tg a vale:

- a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 2. d) 1

TC.103 (PUC-70) Simplificando-se a expressão: $\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$, obtêm-se:

- a) sen x
- c) tg x
- d) cotq x

TC.104 (MACK-76) A expressão $tg \frac{x}{2} + cotg \frac{x}{2}$ para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, é equivalente a:

- b) 2 sec x a) 2 sen x
- c) 2 cos x d) 2 cossec x
- e) 2 tg x

TC.105 (FEI-73) Se $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ e $\cos(a_n) = \frac{n}{n+1}$, $\cos(\frac{a_n}{2})$; vale

$$a) = \frac{n}{2(n+1)}$$

b)
$$\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}}$$

a)
$$\frac{n}{2(n+1)}$$
 b) $\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{n+1}{n}}$

d)
$$\frac{2n}{n+1}$$

e)
$$\frac{1}{n^2}$$

TC.106 (FFCLUSP-67) A igualdade $tg x = a \cdot cotg x + b cotg 2x + cotg x + b cotg 2x + cotg x + cotg x$ real tal que $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Então a e b valem respectivamente:

a)
$$a = 1$$
, $b = -2$ b) $a = -2$, $b = 1$ c) $a = 1$, $b = 0$ d) $a = 1$, $b = 2$ e) $a = b$

c)
$$a = 1$$
, $b = 0$

c)
$$a = 1$$
, $b = 0$

TC.107 (ITA-75) Sabendo-se que sen $x = \frac{m-n}{m+n}$, $n \ge 0$ e $m \ge 0$, podemos afirmar que

$$tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$$
 é igual a:

a)
$$\frac{n}{m}$$

b)
$$\frac{\sqrt{m}}{n}$$

a)
$$\frac{n}{m}$$
 b) $\frac{\sqrt{m}}{n}$ c) $1 - \frac{n}{m}$

d)
$$\sqrt{\frac{n}{m}}$$

e) nenhuma das anteriores

TC.108 (CESCEA-76) Transformando-se em produto a expressão cos 70° - sen 60° obtém-se:

TC.109 (GV-74) Assinalar a afirmação verdadeira:

a)
$$sen 20^{\circ} + sen 30^{\circ} = sen 50^{\circ}$$

b)
$$\cos 20^{\circ} - \cos 10^{\circ} = \cos 10^{\circ}$$

d)
$$\cos 20^{\circ} + \cos 30^{\circ} = 2 \cdot \cos 25^{\circ} \cdot \cos 85^{\circ}$$

e) sen
$$30^{\circ} + \cos 30^{\circ} = 1$$

TC.110 (GV-73) A expressão sen x - cos x é identica a:

a)
$$\sqrt{2}$$
 · sen $(x - \frac{\pi}{4})$

b)
$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$
 - sen $(x - \frac{\pi}{2})$

c)
$$2 \cdot \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

d)
$$\sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

e)
$$\sqrt{3} \cdot \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

TC.111 (MACK-76) A expressão sen (135° + x) + sen (135° - x) é igual a:

a)
$$\sqrt{2}$$
 sen x

a)
$$\sqrt{2} \operatorname{sen} x$$
 b) $\sqrt{3} \cos x$ c) -1 d) $\sqrt{2} \cos x$ e) $-\sqrt{2} \operatorname{sen} x$

TC.112 (PUC-75) sen α + 2 sen 2α + sen 3α é igual a:

a)
$$2 \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$
 b) $4 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

b)
$$4 \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

TC.113 (ITA-70) Seja P = sen2 ax - sen2 bx. Temos, então que:

b)
$$P = \cos \frac{a}{2} \times \cdot tg bx$$

c)
$$P = 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{a+b}{2}\right) \times \cdot \cos \left(\frac{a-b}{2}\right) \times$$

d)
$$P = sen (a + b)x \cdot sen (a - b)x$$

TC.114 (MACK-77) O menor valor que y pode assumir na igualdade y = cos x + cos 2x

a)
$$-\frac{3}{4}$$
 b) $-\frac{7}{8}$ c) -1 d) $-\frac{9}{8}$ e) não sei

TC.115 (MACK-74) Sendo sen x - sen y = $2 \cdot \text{sen } \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ e lembrando que $|sen z| \le |z|$; $|cos t| \le 1$ e $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; podemos afirmar que, para quaisquer números x e y reais:

a)
$$| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y | \leq \frac{|x + y|}{2}$$
 b) $| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y | \leq \frac{|x - y|}{2}$

c)
$$| sen x - sen y | \leq | x - y |$$

d)
$$|\sin x - \sin y| \le 2|x^2 - y^2|$$

TC.116 (GV-75) A expressão $\frac{\text{sen } (a-x) + \text{sen } (2a-3x)}{\cos (a-x) + \cos (2a-3x)} \text{ \'e o mesmo que}$

a)
$$-tg (s - \frac{3}{2} x)$$

b) cotg (a -
$$\frac{3}{2}$$
 x)

a)
$$-tg(a-\frac{3}{2}x)$$
 b) $cotg(a-\frac{3}{2}x)$ c) $-tg(\frac{3}{2}a-2x)$

d) cotg
$$(\frac{3}{2}a - 2x)$$

d) cotg $(\frac{3}{2}a - 2x)$ e) nenhuma das anteriores

TC.117 (MACK-74) Sendo u a unidade em radianos de um ángulo e $v = \frac{n}{\Delta} - u$, a expressão:

$$S = \frac{\text{sen } u + \cos u}{\sqrt{2 \cdot \text{sen } u \cdot \cos u}} \text{ em função de } x = \cos v \text{ é:}$$

a)
$$\frac{2x}{x^2 + 1}$$

a)
$$\frac{2x}{x^2+1}$$
 b) $\frac{x}{2x^2+1}$ c) $\frac{2x}{1-x^2}$ d) $\frac{2x}{2x^2+1}$ e) $\frac{2x}{x^2+2}$

c)
$$\frac{2x}{1-x}$$

d)
$$\frac{1}{2x}$$

e)
$$\frac{2x}{x^2+2}$$

TC.118 (PUC-75) $\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{8\pi}{12}$ value:

a)
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1)$$
 b) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}-1)$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-\sqrt{3})$

b)
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}-1)$$

c)
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-\sqrt{3})$$

d)
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(2\sqrt{3}-1)$$
 e) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-2\sqrt{3})$

e)
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-2\sqrt{3})$$

TC.119 (MACK-75) Simplificando se: $4 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (60^{\circ} - \alpha) \cdot \text{sen } (60^{\circ} + \alpha)$ obtém-se:

- a) sen &
- b) sen 30x
- c) sen 2\alpha
- d) sen 50
- e) sen 4α

TC.120 (ITA-69) Para que valores de tilo sistema

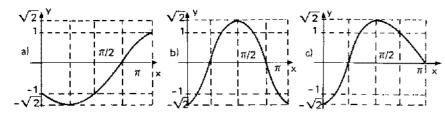
$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \log_{10} t^2 \end{cases}$$

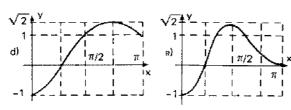
admite solução:

- a) $0 \le t \le 10$
- b) $0 \le t \le 10\pi$

- d) 0.1 < t ≤ 10
- e) nenhum dos intervalos anteriores

TC.121 (GV-75) O gráfico de y = sen x - cos x, para $0 \le x \le \pi$ é:





EQUAÇÕES

TC.122 (FUVEST-77) No intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, a equação

$$\sqrt{1-\sin^2 x} + \cos x = -\sqrt{2}$$

a) não admite solução

- b) admite como solução $x = \frac{3\pi}{2}$
- c) admite como solução $x = \frac{2\pi}{2}$ d) admite como solução $x = \frac{5\pi}{6}$
- e) admite como solução x = 71

TC.123 (PUC-76) Os valores de x que satisfazem a equação $\cos(3x - \frac{\pi}{6}) = 0$, são:

a)
$$k = \frac{7\pi}{30} + k \frac{\pi}{3}$$
; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

b)
$$x = \frac{7\pi}{15} + k \frac{\pi}{3}$$
; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

c)
$$x = \frac{7\pi}{2} + k \frac{\pi}{4}$$
; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

d)
$$x = \frac{7\pi}{5} + k \frac{\pi}{2}$$
; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

e)
$$x = \frac{7\pi}{4} + k \frac{\pi}{6}$$
; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

TC.124 (MACK-76) O menor valor positivo de x, para o qual $9^{-\cos x} = \frac{1}{3}$, é:

- a) $\frac{\pi}{a}$
- b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

TC.125 (CESCEM-73) Se o ponto $(x_0; y_0)$ pertence ao gráfico da função y = tg x, então uma condição necessária e suficiente para que o ponto (a; y₀) também pertença a este gráfico é:

a $a = tg \times 0$

b) que (a - x₀) seja múltiplo de #

c) a .. $\frac{\pi}{2}$

d) a = arctg xo

e)
$$(a - x_0) = 2k\pi$$
, $k \in \mathbb{Z}$

TC.126 (EESCUSP-68) As soluções da equação sen $\pi x = \text{sen} \left[\pi \cdot (2x + 1) \right]$ são da forma:

- a) x = a onde a é inteiro
- b) x = qualquer inteiro positivo
- c) $x = \frac{a}{2}$ onde a é natural
- d) x = qualquer racional
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC,127 (ITA-77) Resolvendo a equação $tg(2 \log x - \frac{\pi}{6}) - tg(\log x + \frac{\pi}{3}) = 0$ temos:

- a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; k = 0, 1, 2, ...
- b) $x = e^{\pi/2} \pm k\pi$; k = 0, 1, 2, ...
- c) $\log x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi$; k = 0, 1, 2, ...
- d) $x = e^{\pi/6} \pm 2k\pi$; k = 0, 1, 2, ...

b) 1

e) nenhuma das anteriores

TC.128 (CESGRANRIO-77) O número de raízes da equação

- no intervalo $[\pi, 3\pi]$ é:
- a) 2

- c) 3
- d) 4
- e) 0

- TC.129 (MACK-75) Se tg 4x + tg $(2x \frac{\pi}{4}) = 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$, então x pode ser
 - a) $\frac{\pi}{16}$ b) $\frac{3\pi}{24}$ c) $\frac{5\pi}{24}$ d) $\frac{7\pi}{24}$

- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.130 (CESCEA-70) Se a é a menor raiz positiva da equação $(tg \times -1) \cdot (4 \cdot sen^2 \times -3) = 0$ então, o valor de sen⁴a - cos²a é

- b) 0 c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$
- TC.131 (CESCEA-75) A soma das raízes da equação 1 4 · cos² x = 0, compreendidas entre D e # é:

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{6}$
- TC.132 (CESGRANRIO-76) No intervalo [0, 6#] a equação trigonométrica

$$\cos 2x + 2 \sin^2 x + 2 = 0$$

- a) possui uma infinidade de raízes
- b) possui exatamente duas raízes

c) não possui raízes

- d) possui uma única raiz
- e) possui exatamente três raízes
- TC.133 (ITA-69) A equação sen² $\frac{3x}{2}$ cos $\frac{3x}{2}$ = a tem solução para valores particulares de a. Assinale o item que lhe parecer correto;
 - a) $1 < a < \frac{7}{4}$
 - b) $-2 < a < \frac{5}{4}$
 - c) $-1 < a < \frac{1}{4}$
 - d) $1 < a < \frac{3}{2}$
 - e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.134 (CESCEM-73) Os valores de x entre 0 e 2\pi que satisfazem a equação: $2 \cdot \text{sen}^2 \times + |\text{sen} \times| = 1 = 0$ sao:
 - a) aqueles para os quais sen $x = \frac{1}{2}$ ou sen x = -1
 - b) $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$; $x = \frac{7\pi}{6}$; $x = \frac{11\pi}{6}$
 - c) x = #
 - d) $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
 - e) $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$; $x = \frac{3\pi}{2}$

- TC.135 (GV-75) A solução da equação: $\frac{625\cos^2 x}{25\cos x} = 1$ para $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ é:
 - at x = 0
 - b) $x = \frac{\pi}{6}$
 - c) x = 0 ou $x = \frac{\pi}{6}$
 - d) $x = \frac{\pi}{2}$
 - e) $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$
- TC.136 (GV-73) Dada a equação $\cos^2 x 2 \cdot \sec^2 x = 1$, com $0 \le x \le \pi$, então

 - a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{3\pi}{4}$ c) x = 0
 - d) não existe x que satisfaz a equação
 - e) nechuma das respostas anteriores
- TC.137 (GV-75) O conjunto de todas as soluções da equação cos²x · tg x = sen x, é o conjunto dos números x tais que, x é igual a:

- a) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ b) $2k\pi$ c) $k\pi$ d) $k\pi + \frac{3\pi}{2}$
- el nenhuma das anteriores
- TC.138 (CESCEM-73) Em função de um número k inteiro relativo, todas as soluções da equação:

$$\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

são dadas por:

- a) $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ b) $\alpha = k\pi$ c) $\alpha = \frac{k\pi}{4}$ d) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e) $\alpha = 2k\pi$
- TC.139 (CESCEM-72) A expressão: $sen^6x + cos^6x = 1 3 \cdot sen^2x \cdot cos^2x$
 - a) é uma equação trigonométrica que só admite raízes no primeiro quadrante
 - b) é uma equação trigonométrica que só admite um número finito de raízes
 - c) é uma identidade trigonométrica
 - d) é uma equação trigonométrica que só admite raízes positivas
 - e) é uma equação trigonométrica que não admite raízes
- TC.140 (ITA-71) Qual é o menor valor de x que verifica a equação tg x + 3 · cotg x = 3?
 - a) $x = \frac{\pi}{4}$
 - b) para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 - c) para nenhum valor de x
 - d) para todo valor de $x \neq n \frac{\pi}{2}$ onde $n = 0, \pm 1, \pm 2 ...$
 - e) apenas para x no terceiro quadrante

TC.141 (MACK-77) Os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo não isósceles são raízes da equação (em x):

$$3 tg x + k^2 \cot g x = 4k.$$

a)
$$k = 1$$
 b) $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $k = \sqrt{3}$ d) $k = \frac{1}{3}$ e) Não sei

c)
$$k = \sqrt{3}$$

d)
$$k = \frac{1}{3}$$

- TC,142 (UNB-74) Se $\sec^2 x + \lg x 7 = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{3}$ então:
 - a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{6}$ c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ d) nenhuma das anteriores
- TC.143 (CESCEA-71) O conjunto solução da equação $3 \cdot tg^2 x + 5 = \frac{7}{1000 \text{ yr}}$, no intervalo fechado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é:
 - a) $\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0\}$ b) $\{\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$ c) $\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$

- d) $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$
- e) não sei
- TC.144 (FEI-73) A equação sen 2x = sen x, no intervalo $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$ tem:
 - a) nenhuma solução b) 2 soluções c) 3 soluções d) 4 soluções e) 5 soluções
- TC.145 (ITA-72) Assinale uma solução para a equação trigonométrica

$$\sqrt{3} \cdot \text{sen } x + \cos x = \sqrt{3}$$

- a) $x = 2k\pi \frac{\pi}{r}$
- b) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$
- c) $x = 2k\pi \frac{\pi}{2}$
- d) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.146 (ITA-73) Seja a equação (log, m) sen x ± cos x = log, m. Quais as condições sobre m para que a equação admita solução?
 - a) m > 0 se x = $(2k + \frac{1}{2})\pi$, m > 0 e m \neq 1 se x \neq $(2k\pi + \frac{1}{2})\pi$
 - b) m $\neq 0$ se x = $(2k + \frac{1}{2})\pi$, m $\geqslant 0$ e m \neq e se x $\neq (2k + \frac{1}{2})\pi$
 - c) m > e se x = $(2k + \frac{1}{2})\pi$, m ≥ 1 se x $\ne (2k + \frac{1}{2})\pi$
 - d) m > $-\frac{1}{2}$ e m $\neq 0$ se x = $(2k + \frac{1}{2})\pi$, m $\neq 0$ se x $\neq (2k + \frac{1}{2})\pi$
 - e) nenhuma das respostas anteriores

- TC.147 (PUC-73) Se $\frac{1 tg x}{1 + to x} = 1 sen 2x$, então os valores de x são:
 - a) $k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$
- b) $2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$
- c) $2k\pi + \pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$
- d) $2k\pi = \pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$
- e) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$
- TC.148 (MACK-74) $f(x) = \cos^2(x \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$
 - a) igual a 1 para todo x real;
 - b) igual a 1 exclusivamente para $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$, k sendo inteiro
 - c) igual a 1 só para x = 0
 - d) periódica de período $\frac{\pi}{2}$
 - e) sempre diferente de 1
- TC.149 (POLI-68) No intervalo 0 ≤ x ≤ 2π o número de soluções da equação trigonométrica $\cos^9 x + \cos^8 x + \cos^7 x + ... + \cos x + 1 = 0$
 - a) é zero
 - b) é um
 - c) é dois
 - d) é quatro
 - e) nenhuma das anteriores
- TC.150 (ITA-71) A equação $\{sen(\cos x)\} \cdot \{cos(\cos x)\} = 1$ é satisfeita para:

a)
$$\times = \frac{\pi}{4}$$

b)
$$x = 0$$

cl nenhum valor de x

- d) todos os valores de x
- el todos os valores de x pertencentes ao terceiro quadrante
- TC.151 (GV-72) Sendo 0 < x < π, a equação 2 log sen x + log 2 = 0 tem por solução

- a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ e) nenhuma das anteriores
- TC.152 (1TA-72) Quais condições devem satisfazer a e k para que a seguinte igualdade tenha sentido?

- a) $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, $k \ge 0$ b) $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, k < 0
- c) $-\frac{\pi}{2} < a \le \frac{\pi}{2}$, k > 0 d) $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$, $k \ge 0$
- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.153 (MACK-77) O número de soluções reais da equação $x^2 x \cos x = 0$, -π ≤ x ≤ π é:
 - a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- el Não sei

TC.154 (SANTA CASA-77). O menor valor de x que satisfaz à equação. log x = cos x está

- a) 0 e 1
- b) 1 e 1,6 c) 1,6 e 2,4 d) 2,4 e 3,2 e) 3,2 e 4.0

TC.155 (ITA-71) Dada a equação log (cos x) = tg x, as soluções desta equação em x satisfazem a relação:

- a) $\frac{3\pi}{2}$ < x ≤ 2
- b) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ c) $0 < x < \pi$

- d) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TC.156 (ITA-76) Resolvendo a equação

$$3 \operatorname{sen}^{2} \{e^{x}\} - 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} (e^{x}) \cdot \cos (e^{x}) - 3 \cos^{2} (e^{x}) = 0$$

a)
$$e^{x} = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$
, $k = 0, 1, 2, 3, ...$

b)
$$x = \log_{e}(2k\pi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\pi)$$
, $k = 0, 1, 2, ...$

c)
$$e^{x} = k\pi + \frac{\pi}{3}$$
, $k = 0, 1, 2, 3, ...$

d)
$$x = \log_e(\frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{6}), k = 1, 2, 3, ...$$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.157 (ITA-73) Seja a equação $3 \text{ tg } 3x = [3(\log_e t)^2 - 4 \log_e t + 2] \text{ tg } x, x \neq n\pi$. Quais as condições sobre t para que a equação acima admita solução

a)
$$0 < t < \frac{1}{e}$$
 ou $e^{\frac{1}{3}} < t < e$ ou $t > e^{\frac{7}{3}}$

b)
$$e^{\frac{1}{3}} \le t \le e^{\frac{\pi}{2}}$$
 ou $0 < t < a$

c)
$$e^{\frac{1}{4}} < t \le e^{\frac{2}{3}}$$
 ou $\frac{1}{4} > t$

- d) t > 0 e $t \neq 1$
- e) nenhuma das anteriores

FUNCÕES CIRCULARES INVERSAS

TC.158 (MACK-74) Sejam f, g e h funções de A em A, ande A = [-1, 1], assim definidas:

$$f(x) = sen x$$
; $g(x) = sen \pi x$; $h(x) = \frac{\pi}{2} x$.

Podemos afirmar que:

- a) todas são inversíveis
- b) todas são sobrejetoras

c) só uma é injetora

- d) só uma é sobrejetora
- e) só uma é injetora e sobrejetora

TC.159 (MACK-73) O domínio da função definida por $y = arc sen (\sqrt{2x - 3})$ 6:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge \frac{3}{2}\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \le x \le 2\}$

 - c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 0 \text{ ou } \frac{5}{2} \le x \le 4\}$
 - e) nenhuma das respostas anteriores

TC.160 (MACK-77) O valor de arcsen (cos $\frac{33\pi}{\epsilon}$) é:

- a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{-\pi}{10}$ c) $\frac{\pi}{10}$ d) $\frac{-3\pi}{5}$

e) não sei

TC.161 (MACK-74) O valor de tg 2 (arc sen $\frac{\sqrt{3}}{2}$) é:

- a) $\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.162 (PUC-71) Estando as determinações dos arcos compreendidas entre $0 e^{-\frac{R}{2}}$, então o valor da expressão

y = sen (arc sen
$$\frac{1}{1+a^2}$$
 + arc cos $\frac{1}{1+a^2}$) é:

- a) $\frac{1}{a}$ b) 1 c) 3 d) $\frac{2}{a}$
- e) 0

TC.163 (ITA-72) Para todo $\alpha \in \beta$; $|\beta| < 1$, a expressão tg (arc tg α + arc sen β) é igual a:

- c) $\frac{\alpha \beta}{\alpha^2 \sqrt{\beta^2 + 1}}$
- b) $\frac{\alpha \beta}{\alpha\beta + \sqrt{1 \beta^2}}$ d) $\frac{\sqrt{1 \beta^2 (\alpha \beta)}}{\alpha\beta 1}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.164 (PUC-70) 2 arctg $\frac{1}{2}$ + arctg $\frac{1}{7}$ é igual:

- d) $\frac{\pi}{4}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.165 (LINS-67) Admitindo a variação de arcsen x no intervalo fechado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a solução da equação arcsen x = 2 arcsen $\frac{1}{3}$ é:

- a) x = -2
- $b^{\dagger} x = 1$
- c) x = #
- d) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
- e) nenhume des respostas anteriores

TC.166 (MACK-75) O conjunto solução de ercsen 2x - 3 arcsenx = 0 tem:

- a) 0 elementos
- c) 2 elementos

- d) 3 elementos
- e) 4 elementos

TC.167 (VALEPARAIBANA-72-SJC) Resolvendo a equação

$$\arctan \left(\frac{1 + e^x}{2} \right) + \arctan \left(\frac{1 - e^x}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

obtemos:

- a) x = 0
- b) $x = \pm 1$
- c) $x = \pm 2$ d) $x = \pm 3$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.168 (MACK-76) Sendo $f(x) = \arcsin x + g(x) = 1 + \cot^2 x$, o valor de $(g \ominus f)(\frac{1}{2})$

- a) $\frac{17}{\alpha}$
- b) $\frac{1}{0}$ c) $\frac{8}{0}$ d) 1

TC.169 (ITA-71) Consideremos a equação $\{\log_e (\text{sen x})\}^2 - \log_e (\text{sen x}) - 6 = 0$ a(s) solução (es) da equação acima é dada por:

- a) $x = arc sen(e^2)$ e x = arc sen(3) b) $x = arc sen(\frac{1}{2})$ e $x = arc sen(\frac{1}{2})$
- c) $x = arc tg(e^2)$ e x = arc cos(3) d) $x = arc sen(\frac{1}{3})$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.170 (ITA-75) Seja S = $log_3(tg x_1) + log_3(tg x_2) + log_3(tg x_3) + ... onde$

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$
 e $x_{n+1} = \text{arc tg } (\sqrt{\text{tg } x_n}) \cdot n = 2, 3, ...$

Nestas condições, podemos assegurar que:

- a) $S = log_3(tgx_1 + tgx_2 + tgx_3 + ...)$ b) S = -1
- c) S = 2

d) S = 1

e) nenhuma das anteriores

TC.171 (ITA-72) Consideremos a função $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n$, onde $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Pa-

- ra que valores de x temos $10 \le S(x) \le 20$?
- a) arc sen $\frac{9}{10} \le x \le arc sen \frac{19}{20}$
- b) arc sen $\frac{10}{9} \le x \le arc sen \frac{20}{10}$
- c) arc sen $\frac{10}{11} \le x \le arc sen \frac{20}{21}$
- d) arc sen $\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \arg \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

INEQUACOES

TC.172 (CESCEA-74) A solução da desigualdade sen² x - $\frac{1}{2} \ge 0$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

a)
$$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$
 ou $\frac{3\pi}{4} \le x \le \pi$

- b) $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$
- c) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{2}$
- d) $0 \le x \le \frac{\pi}{\epsilon}$ ou $\frac{5\pi}{\epsilon} \le x \le \pi$

TC.173 (CESCEM-72) Considere a designated sen $x + sen^2 x > 0$; pode-se afirmar que:

- a) só está satisfeita para x no primeiro quadrante
- b) só está satisfeita para x entre θ e π
- c) a desigualdade que se obtém substituindo-se x por -x é equivalente à desigual dade dada
- d) os valores de \times que a satisfazem são precisamente aqueles para os quais $\sin x > 0$
- e) existe x no terceiro quadrante que satisfaz a desigualdade

TC.174 (CESCEA-71) A solução da inequação $sen^2 x \le 2 sen x$, no intervalo fechado 0, 2π é:

- a) $0 \le x \le 2\pi$ b) $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ c) $0 \le x \le \pi$

- d) $0 < x < \frac{\pi}{2}$
- e) não sei

TC.175 (GV-72) A solução da inequação $\sqrt{2 \cdot \cos^2 x} > \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

- a) $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ b) $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \le x \le \pi$
- c) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$
- e) nenhuma das anteriores

TC.176 (MACK-75) Para $0 \le x \le 2\pi$, o conjunto-solução de $(\sin x + \cos x)^2 > 1$ é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3n}{5} < x < 2n\}$

TC.177 (ITA-76) A inequação $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \sin x + \sqrt{2} \le 0$ tem uma solução x.

a)
$$45^{\circ} \le x \le 60^{\circ}$$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.178 (MACK-73) Se $0 \le \alpha \le \pi$ e, para todo x real, $x^2 + x + tg \alpha > \frac{3}{4}$ então:

a)
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

b)
$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

a)
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$
 b) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$

d)
$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

e) não existe & nestas condições

TC.179 (CESCEA-71) A solução da inequação sen $2x \cdot (\sec^2 x - \frac{1}{2}) \le 0$, no intervalo fechado [0, 2#] é:

a)
$$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$$
 ou $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$

b)
$$0 \le x < \frac{\pi}{2}$$
 ou $\pi \le x < \frac{3\pi}{2}$

c)
$$\frac{\pi}{2} \le x < \pi$$
 ou $\frac{3\pi}{2} \le x < 2\pi$

d)
$$\frac{\pi}{2} < x \le \pi$$
 ou $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$

e) não sei

TC.180 (CESCEA-75) Os valores de x ∈]0, π[para os quais

$$(1 + \operatorname{sen} x) \cdot (1 - \cos x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x) < 0$$
 são tais que:

a)
$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

b)
$$x \neq \frac{\pi}{2}$$

c)
$$\frac{\pi}{2} < x < \pi$$

d)
$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

e)
$$0 \le x \le \pi$$

TC.181 (MACK-73) Os pontos da circunferência trigonométrica, correspondentes às soluções do sistema:

$$\begin{cases} sen 2x > 0 \\ cotg x < 0 \end{cases}$$

- a) estão todos no primeiro quadrante
- b) estão todos no segundo quadrante
- c) estão todos no terceiro quadrante
- d) estão todos no quarto quadrante
- e) não existem

TC.182 (S. CARLOS-68) A inequação | cos x | ≥ sen x, 0 < x < 2π é válida se e somente se:

a)
$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

c)
$$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$
 e $\frac{3\pi}{4} \le x \le 2\pi$ d) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi$

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$$

e)
$$0 \le x \le \frac{\pi}{8}$$

TC.183 (MAUÁ-59) Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem à desigualdade $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x > \sqrt{2}$ estão compreendidos entre:

a)
$$\frac{\pi}{12}$$
 e $\frac{7\pi}{12}$ radianos b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ radianos

b)
$$\frac{\pi}{6}$$
 e $\frac{7\pi}{6}$ radiano

c)
$$\frac{\pi}{4}$$
 e $\frac{\pi}{2}$ radianos

d) nenhuma das respostas anteriores

TC.184 (ITA-71) Seja n um número inteiro n > 1 e x \in (0, $\frac{\pi}{2}$). Qual afirmação abaixo é sempre verdadeira?

TC.185 (GV-75) Para que y = log (1 - sen² x) tenha valores reais, devemos ter, para k inteiro:

a)
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

b)
$$(2k - 1)\pi \le x \le 2k\pi$$

c)
$$2k\pi \le x \le (2k + 1)\pi$$

d)
$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

e)
$$k\pi < x < (k + 1)\pi$$

TC.186 (MACK-74) Sendo sen x - sen y = 2 sen $\frac{x-y}{2}$ cos $\frac{x+y}{2}$ e lembrando que $|\sec z| \le |z|$, $|\cos z| \le 1$ e $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, podemos afirmar que, para quaisquer números x e y reais:

a)
$$|\sin x - \sin y| \le \frac{|x + y|}{2}$$

b)
$$|\sin x - \sin y| \le \frac{|x - y|}{2}$$

d)
$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le 2|x^2 - y^2|$$

e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira

TC.187 (ITA-76) A respeito do produto

P = (sen (bx) + cossec(bx))(cos (bx) + sec (bx))(tq (bx) + cota (bx))

podemos afirmar que:

- a) P é positivo, para todo x real e b > 0
- b) P pode ser negativo ou positivo, dependendo da escolha de x e b em IR
- c) Pénegativo para $x = k\pi$ e b ≤ 0 ou Pépositivo para $x = k\pi$ e b ≥ 0 , quando k = 1, 2, ...
- d) P é positivo, quando bx $\neq \frac{k}{2}\pi$, para todo k = 0, ±1, ±2, ...
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.188 (ITA-68) Seja $y = a \log tg \times com \ 0 \le a \le 1$, onde $\log u$ indica o logaritmo neperiano de u. Então, log v ≥ 0 se:

a)
$$\frac{\pi}{2} < x \le \pi$$
 e $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$

b)
$$0 \le x < \frac{\pi}{2}$$
 e $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$

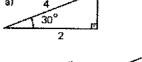
c)
$$0 < x \le \frac{\pi}{4}$$
 e $\pi < x \le \frac{5\pi}{4}$

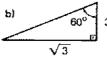
d)
$$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$
 e $\pi \le x \le \frac{5\pi}{4}$

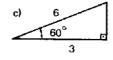
e)
$$0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$$

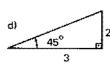
TRIÂNGULOS

TC.189 (CESCEA-74) Entre os triángulos retángulos abaixo, um e somente um apresenta os dados corretos. Assinale-o:



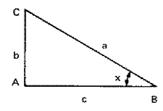






e) não sei

- TC.190 (CESCEM-75) Considerando o triângulo retângulo ABC, abaixo, com as seguintes dimensões:
 - a = 7.5 m; b = 4.5 m; c = 6 m; pode-se afirmar que o valor da "tax" é igual a:
 - a) 1.25
 - b) 1.33...
 - c) 1.66...
 - d) 0.75
 - e) 0.6

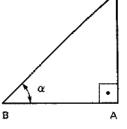


TC.191 (CESCEA-77) A soma dos catetos do triângulo retângulo é:

Dados:

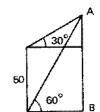
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

- a) 14
- b) 12 d) 16
- c) 10 $\sqrt{3}$
- e) 10



TC.192 (MACK-77) Na figura ao tado, AB vale:

- a) 60
- b) 65
- c) 70
- d) 75
- e) não sei

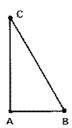


TC.193 (EPUSP-66) AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo ABC. A mediana AD mede 7 e a mediana BE mede 4, O comprimento AB é igual a:

- a) $2\sqrt{13}$ b) $5\sqrt{2}$
- c) 5 $\sqrt{3}$
- d) 10
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.194 (GV-70) No triângulo ABC ao lado sabemos que

 $\hat{A} = 90^{\circ}$ $\hat{\mathbf{B}} = 60^{\circ}$ AB = 50 cm

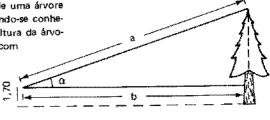


então o segmento AC mede

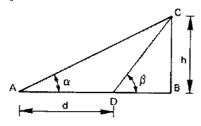
- a) 25 cm
- b) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm c) 100 cm d) 50 $\sqrt{3}$ cm e) $\frac{50\sqrt{2}}{2}$ cm

TC.195 (CESCEM-76) Uma pessoa de 1,70 m de altura observa o topo de uma árvore sob um angulo a. Desejando-se conhecer, aproximademente, a altura da árvore, deve-se somar 1,70 m com

- a) b to a
- b) a tq Q
- c) b cos a
- d) a cos (x
- e) b sin a



TC.196 (CESCEA-76) Na figura abaixo



AD = d, BC = h, $\widehat{CAD} = \alpha$, $\widehat{CDB} = \beta$, \widehat{EntBo} :

a)
$$h = \frac{d}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

b)
$$h = \frac{d}{tg \alpha - tg \beta}$$

c)
$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

d)
$$h = \frac{d}{tg \alpha + tg \beta}$$

e)
$$h = \frac{d}{\cot \alpha + \tan \beta}$$

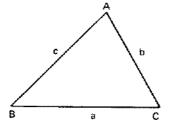
TC.197 (CESCEA-73) No triângulo ABC da figura, tem-se b = 2, $\hat{B} = 45^{\circ}$, e Ĉ = 60°. Então o lado a mede:

a)
$$\sqrt{3} - 1$$

b)
$$2 + \sqrt{2}$$

c)
$$1 + \sqrt{3}$$

d) 1 +
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$



TC.198 (CESCEM-72) Num triângulo retângulo em que um cateto vale 1 e o outro vale $tg \varphi$ a hipotenusa vale:

- a) sec ⊘
- b) sec ♥
- c) cos φ
- d) sen Ø
- e) cossec @

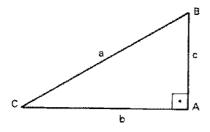
TC.199 (GV-73) Considere o triàngulo retângulo e indique por S a sua àrea. Assinale a afirmação verdadeira

a)
$$ug \hat{C} = \frac{b}{c}$$

c)
$$S = b^2 tg \hat{C}$$

d)
$$S = \frac{a^2 \cdot \text{sen } 2\hat{8}}{4}$$

e)
$$\cos \hat{B} = \frac{b}{c}$$



TC.200 (ITA-75) Se, na figura abaixo, c é uma circunferència de raio R, r e s são retas tangentes à circunferência e OT = 2R, então o ângulo a das retas r e s deve verificar uma das alternativas seguintes:

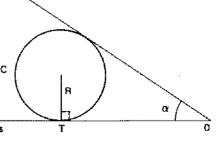
a)
$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

b)
$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$
 e $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

c) sen
$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 e $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

d)
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 e sen $\alpha = \frac{1}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores



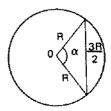
TC.201 (SANTA CASA-73) Em relação ao ângulo central α, pode-se dizer que:

a) sen
$$\alpha = \frac{3}{8}$$

b) sen
$$\alpha = \frac{3}{4}$$

c) sen
$$\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

e) sen
$$\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$



TC.202 (MAUÁ-68) Num triângulo ABC cujos ângulos são designados por A, B e C, supõe-se que $2 \cdot \lg \hat{A} = \lg \hat{B} + \lg \hat{C}$ e $0 < \hat{A} < \frac{\pi}{2}$. Nesse triângulo vale a rela-

b)
$$\cos(\widehat{B} + \widehat{C}) = 2 \cdot \cos A$$

c)
$$\cos(\hat{B} - \hat{C}) = 2 \sec \cdot \hat{A}$$

d)
$$\operatorname{tg} \widehat{B} - \operatorname{tg} \widehat{C} = \sqrt{3}$$

TC.203 (ITA-77) Considere um triàngulo ABC cujos àngulos internos Â, B e Ĉ verificam a relação sen $\widehat{A} = \operatorname{tg} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$. Então podemos afirmar que:

- a) com os dados do problema, não podemos determinar nem B e nem Ĉ
- b) um desses àngulos è reto

c)
$$\hat{A} = \frac{\pi}{6} \times \hat{B} + \hat{C} = \frac{5\pi}{6}$$

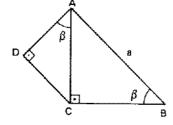
d)
$$\hat{A} = \frac{\pi}{3}$$
, $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$, $\hat{C} = \frac{5\pi}{12}$

e) nenhuma das anteriores

TC.204 (GV-73) Em um triângulo ABC, os ângulos e B medem, respectivamente, 60° e 45°; o lado BC mede 5√6 cm. Então, a medida do lado AC é:

- a) 18 cm
- b) $5\sqrt{12}$ cm c) 12 cm
- d) 9 cm e) 10 cm

- TC.205 (ITA-73) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B, C. O comandante quando o navio está em A, observa um farol L, e calcula o angulo LÂC = 30°. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo LBC = 75°. Quantas milhas separa o farol do ponto B?
 - a) 4
- b) 2 √2
- c) $\frac{8}{2}$ d) $\sqrt{2}$
- e) nenhuma das anteriores
- TC.206 (MACK-76) Na figura ao lado, AC L CB e AD LDC: m(DAC) = m(ABC) = B e AB = a. O valor de AD, em função de a e de B. é:
 - a) $\frac{1}{2}$ a sen 2β b) 2 a sen 2β
 - c) $\frac{1}{2}$ a sen β d) a sen $\frac{\beta}{2}$
 - e) 2 a sen B



- TC.207 (ITA-74) Deseja-se construir uma ferrovia ligando o ponto A ao ponto B que está 40 √2 Km a sudeste de A. Um lago, na planície onde estão A e B impede a construção em linha reta. Para contornar o lago, a estrada será construída em 2 trechos retos com o vértice no ponto. C, que está 36 Km a leste e. 27 Km ao sul de A. O comprimento do tracho CB é:
 - a) √ 182 Km
- b) √183 Km
- c) √184 Km d) √185 Km
- e) nenhuma das respostas anteriores
- TC.208 (EPUSP-66) Os lados de um triángulo estão na razão 6:8:9. Então:
 - a) o triângulo é obtusângulo
- b) o triângulo é acutángulo
- c) os ângulos estão na razão 6:8:9
- d) o ângulo oposto ao lado maior é o dobro do ángulo oposto ao lado menor
- e) nenhuma das anteriores
- TC.209 (FFCLUSP-67) Dados os segmentos. AC e BC e um ángulo B, é possível construir-se um triângulo que tenha. AC e BC como lados e B como angulo não adjacente a AC e BC quando:

- a) AC > BC b) B < $\frac{\pi}{2}$ c) AC < BC d) AC = $\frac{1}{2}$ BC
- e) nenhuma das respostas anterioras
- TC.210 (ITA-75) Num triángulo escaleno ABC, os lados opostos aos ângulos Â, B, Ĉ medem respectivamente a. b. c. Então a expressão:

$$a \cdot \text{sen}(\widehat{B} - \widehat{C}) + b \cdot \text{sen}(\widehat{C} - \widehat{A}) + c \cdot \text{sen}(\widehat{A} - \widehat{B})$$

tem valor que satisfaz uma das seguintes alternativas:

- a) $a \cdot sen \hat{A} + b \cdot sen \hat{B} + c \cdot sen \hat{C}$ b) $sen^2 \hat{A} + sen^2 \hat{B} + sen^2 \hat{C}$

- c) 0
- d) 1
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.213 (GV-75) O lado do octógono regular inscrito num círculo de raio unitário é:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
. Pode-se concluir que $\cos \frac{\pi}{8}$ vale:

a)
$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$
 b) $2+\sqrt{2}$ c) $2-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}-1$ e) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) 2 -
$$\sqrt{2}$$

d)
$$\sqrt{2}-1$$

e)
$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

- TC.212 (MACK-74) A base de um retângulo. AD que é três vezes maior que sua altura AB, é subdividida palos pontos. M e N em três partes de igual medida. Nessas condicões AMB + ANB + ADB é igual a:
 - a) 120°

- b) 90° c) 85° d) 135° e) 75°
- TC.213 (ITA-75) Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência, Sabe-se que $\widehat{A} = 2\widehat{C}$, $\widehat{B} > \widehat{D}$ e tg $\widehat{B} \cdot \text{tg }\widehat{D} + \text{sen }\widehat{A} \cdot \text{sen }\widehat{C} = -\frac{9}{3}$.

Neste caso, os valores de Â, B, Ĉ, D são, respectivamente,

- el nenhuma das anteriores
- TC.214 (ITA-77) Sejam A, B e C, três pontos distintos de uma reta, com B entre A e C. Sejam ale b (a > 2b) los comprimentos de AB e BC respectivamente. Se o segmento BD é perpendicular ao segmento AC, quanto deve medir BD, para que o ángulo BDC seia a metade de BDA?

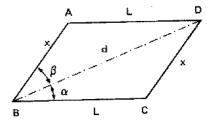
a)
$$x = \frac{a}{\sqrt{b(a-2b)}}$$
 b) $x = \frac{ab}{\sqrt{b(a-2b)}}$ c) $x = \frac{b}{\sqrt{a(a-2b)}}$

$$b) x = \frac{ab}{\sqrt{b(a - 2t)}}$$

c)
$$x = \frac{b}{\sqrt{a(a - 2b)}}$$

d)
$$x = \frac{ab}{\sqrt{a(a-2b)}}$$

- e) nenhuma das anteriores
- TC.215 (ITA-77) Seiam die Lirespectivamente os comprimentos da diagonal BD e do lado BC do paralelogramo ABCD ao lado. Conhecendo-se os ángulos α e β (ver figura), o comprimento x do lado AB é dade por:



a)
$$x = \frac{d \cos \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$$
 b) $x = \frac{d \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$ c) $x = \frac{L \sin \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$

$$x = \frac{d \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$$

c)
$$x = \frac{L \sin \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$$

d)
$$x = \frac{L \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

e) nenhuma das anteriores :

RESPOSTAS

TC.1 8	TC,44 a	TC,87 €	TC.130 c	TC.173 d
TC.2 c	TC.45 d	TC,88 a	TC.131 b	TC.174 c
TC.3 b	TC. 46 a	TC.89 b	TC. 132 c	TC.175 a
TC.4 a	TC.47 c	TC.90 b	TC.133 c	TC, 176 b
TC.5 e	TC,48 c	TC.91 e	TC.134 b	TC.177 c
TC.6 c	TC.49 d	TC.92 e	TC.135 d	TC.178 b
TC.7 b	TC.50 a	TC.93 e	TC.136 d	TC.179 b
TC.8 c	TC.51 c	TC.94 e	TC.137 c	TC.180 c
TC.9 d	TC,52 d	TC.95 d	TC.138 b	TC.181 e
TC.10 c	TC,53 €	TC.96 d	TC.139 c	TC.182 c
TC.11 a	TC,54 e	TC.97 a	TC.140 c	TC.183 a
TC.12 a	TC.55 b	TC.98 d	TC.141 c	TC.184.a
TC,13 a	TC,56 a	TC.99 c	TC.142 b	TC.185 a
TC.14 c	TC.57 e	TC.100 b	TC.143 c	TC.186 c
TC.15 a	TC.58 a	TC.101 a	TC.144 d	TC.187 d
TC.16 d	TC.59 a	TC, 102 a	TC.145 b	TC.188 €
TC.17 b	TC.60 c	TC.103 d	TC.146 e	TC,189 c
TC, 18 c	TC.61 e	TC.104 d	TC.147 a	TC. 190 d
TC, 19 b	TC.62 a	TC.105 b	TC.148 a	TC.191 a
TC,20 a	TC.63 a-	TC,106 a	TC.149 b	TC.192 d
TC.21 d	TC.64 c	TC.107 e	TC. 150 c	TC.193 a
TC,22 d	TC.65 b	TC.108 e	TC.151 d	TC.194 d
TC.23 c	TC.66 d	TC.109 c	TC. 152 e	TC.195 a
TC.24 c	TC,67 a	TC.110 a	TC.153 c	TC.196 c
TC.25 e	TC.68 a	TC.111 d	TC.154 b	TC.197 €
TC.26 b	TC.69 a	TC. 112 b	TC.155 a	TC,198 a
TC.27 a	TC.70 d	TC.113 d	TC.156 d	TC.199 d
TC.28 b	TC.71 a	TC.114 d	TC.157 a	TC,200 a
TC.29 c	TC.72 e	TC.115 c	TC.158 e	TC.201 d
TC.30 c	TC.73 d	TC.116 e	TC.159 b	TC.202 a
TC.31 e	TC.74 b	TC.117 d	TC. 160 b	TC.203 b
TC.32 d	TC.75 e	TC.118 a	TC.161 b	TC,204 e
TC.33 d	TC.76 a	TC.119 b	TC, 162 b	TC.205 b
TC.34 e	TC.77 b	TC.120 d	TC, 163 a	TC,209 a
TC.35 a	TC,78 e	TC,121 d	TC. 164 d	TC.207 d
TC.36 b	TC.79 a	TC.122 a	TC,165 e	TC,209 b
TC.37 a	TC.80 a	TC, 123 a	TC.166 d	TC.209 a
TC.38 c	TC.81 e	TC.124 c	TC.167 a	TC.210 c
TC.39 c	TC.82 e	TC.125 b	TC.168 €	TC,211 e
TC,40 e	TC.83 b	TC.126 e	TC.169 d	TC.212 b
TC.41 d	TC.84 e	TC.127 b	TC.170 d	TC,213 d
TC.42 d	TC.85 a	TC.128 a	TC.171 ¢	TC.214 d
TC,43 R	TC.85 b	TC.129 €	TC.172 b	TC.215 b